

**UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID**

**T E S I S**

**IMPLOSIONES Y EXPLOSIONES EN  
MEDIOS CONDENSADOS**

Por

**Manuel Rodríguez Fernández**

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

Madrid, Septiembre 1977

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

TESIS

IMPLOSIONES Y EXPLOSIONES EN

MEDIOS CONDENSADOS

por

Manuel Rodríguez Fernández

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

Madrid, Septiembre 1977

RESUMEN

## RESUMEN

El objeto primordial de este trabajo es describir algunos procesos de compresión, mediante los cuales se puedan conseguir las altas densidades necesarias para la fusión.

En primer lugar se ilustra, mediante la solución correspondiente a compresiones lentas y algunas soluciones exactas para casos planos, el carácter de los movimientos simétricos de compresión, cuando el material a comprimir, de ecuaciones de estado arbitrarias, se somete a una ley exterior de presiones que de lugar a densidades muy altas respecto a la inicial, sin aparición de ondas de choque que ocasionen variaciones de entropía.

A continuación se da la solución de semejanza que describe las distribuciones espaciales y temporales de velocidad, presión y densidad inmediatamente antes y después de la reflexión de una onda de choque esférica (o cilíndrica) en el centro de simetría, incluyendo una solución analítica para pequeños valores de  $(\gamma - 1)$  y el comportamiento asintótico para  $Y \rightarrow \infty$ .

Se analiza también el proceso autosemejante de compresión isentrópica de la esfera (cilindro), a partir de condiciones iniciales de densidad uniforme y velocidad nula, dando una solución asintótica válida cuando la densidad final es grande comparada con la inicial. Se obtiene también la ley temporal de presiones exteriores a que ha de estar sometida la esfera para que el proceso de compresión tenga lugar de acuerdo con la ley de semejanza.

Por último se describen las primeras etapas del proceso implosivo establecido por una onda de choque originada en la

esfera mediante la aplicación brusca, en su superficie exterior, de una presión uniforme que posteriormente evoluciona con el tiempo siguiendo una ley determinada.

Deseo expresar mi agradecimiento al director de esta tesis, Dr. D. Amable Liñán Martínez, Catedrático de Mecánica de Fluidos de la E.T.S.I. Aeronáuticos, por la ayuda, colaboración y estímulo prestados, sin los cuales este trabajo no hubiera sido posible. Mi reconocimiento también a los Sres. Juan Manuel Valero Medina y Jesús Sánchez Vállez, por su eficiencia e interés en la delineación y mecanografía de estas páginas.

## ÍNDICE

ÍNDICEPágina

INTRODUCCIÓN . . . . .	1
INTRODUCCIÓN A LOS MOVIMIENTOS SIMÉTRICOS DE COM-	
PRESIÓN . . . . .	10
II.1.Introducción . . . . .	11
II.2.Ecuaciones . . . . .	12
II.3.Compresión isentrópica lenta . . . . .	13
II.4.Compresión plana con ondas simples . . . . .	15
II.5.Onda simple que genera un movimiento de com- presión plano con densidad espacial uniforme.	18
COMPRESIÓN SIMÉTRICA MEDIANTE ONDA DE CHOQUE IMPLO-	
SIVA . . . . .	24
III.1.Introducción . . . . .	25
III.2.Ecuaciones . . . . .	26
III.3.Condiciones de salto en una onda de choque ..	29
III.4.Puntos singulares de las ecuaciones . . . . .	33
III.5.Compresión mediante onda de choque implosiva.	44
COMPRESIÓN SIMÉTRICA E ISENTRÓPICA . . . . .	86
IV.1.Introducción . . . . .	87
IV.2.Ecuaciones . . . . .	88
IV.3.Compresión isentrópica plana . . . . .	91
IV.4.Compresión isentrópica con simetría cilín- drica y esférica . . . . .	94
IV.5.Resultados . . . . .	102



V. PRIMERAS ETAPAS DEL PROCESO IMPLOSIVO MEDIANTE ONDA	
DE CHOQUE . . . . .	111
V.1.Introducción . . . . .	112
V.2.Ecuaciones . . . . .	113
V.3.Desarrollo para tiempos pequeños . . . . .	115
V.4.Solución . . . . .	117
V.5.Obtención de $\phi_0$ , $\phi_1(1)$ y $\phi_2(1)$ para una ecua- ción de estado general $e_s=e(p_s,\rho_s)$ . . . . .	119
V.6.Resultados . . . . .	122
REFERENCIAS . . . . .	125
APÉNDICE A . . . . .	133
APÉNDICE B . . . . .	165

LISTA DE SÍMBOLOS

## LISTA DE SÍMBOLOS

### General

$c$	Velocidad del sonido en el medio.
$c_p, c_v$	Calores específicos a presión y volumen constante respectivamente.
$D$	Velocidad de propagación de una onda de choque.
$e$	Energía interna.
$j$	Factor geométrico. $j=0$ simetría plana; $j=1$ simetría cilíndrica; $j=2$ simetría esférica.
$p$	Presión.
$r$	Coordenada radial.
$S$	Entropía.
$t$	Tiempo.
$u$	Velocidad.
$\gamma = \{\partial(\ln p)/\partial(\ln p)\}_S$	En gas perfecto $\gamma = \text{constante} = c_p/c_v$ .
$\rho$	Densidad.
$\rho_0$	Densidad inicial.

### Capítulo II

$R$	Radio de la superficie exterior.
$t_c$	Tiempo característico de compresión
$t_m$	Instante final de compresión.

### Subíndices

- e , Superficie exterior.  
 i , Estado inicial.  
 o , Primera aproximación.

### Capítulos III y IV

- $c, \bar{c}$  , Factores de escala en las expresiones de la posición de las ondas de choque implosiva y explosiva respectivamente.
- $c_o$  , Velocidad inicial del sonido.
- $K$  , Constante ecuación (III.12).  $K = K_i$ . en la implosión,  $K = K_e$  en la explosión.
- $K_R, K_r, K_\lambda$  , Constantes de integración (ecs. (III.31a-b) y (III.44b)).
- $R$  , Variable de semejanza definida en (III.6).
- $R_i, R_e$  , Posición de la onda de choque implosiva y explosiva respectivamente.  $R_i = |Ct|^\alpha$  ,  $R_e = |Ct|^\alpha$
- $V$  , Variable de semejanza definida en (III.4).
- $(v_{1,2}^*, z_{1,2}^*)$  , Puntos singulares dados en (III.20a-b).
- $(v_3, z_3)$  , Punto singular dado en (III.22).
- $X$  , Variable de semejanza,  $X = Z/V^2$  .
- $Y$  , Variable de semejanza,  $Y = 1/Z$ .
- $Z$  , Variable de semejanza definida en (III.5).
- $\alpha$  , Autovalor que determina la posición de la onda de choque.
- $\epsilon$  , Parámetro definido como  $e = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ .

- $\lambda$  , Variable de semejanza definida en (III.7) y (IV.2).
- $\lambda_r$  , Valor de  $\lambda$  en la onda de choque reflejada.
- $\gamma_c$  , Valor de  $\gamma$  para el que  $(V_1^*, Z_1^*)$  coincide con  $(V_2^*, Z_2^*)$
- $\pi_\infty, \pi_r$  , Definidos en las ecuaciones (III.47-48).
- $\rho_r$  , Valor de  $\rho$  en la onda de choque reflejada.
- $\rho_\infty$  , Densidad cuando  $t=0$ .
- $\theta$  , Definido como  $(\alpha - 1)/\alpha$ .

### Subíndices

- $i$  , Instante inicial (excepto  $R_i$ ).
- $p$  , Magnitudes calculadas a lo largo de la trayectoria.
- $r$  , Magnitudes calculadas detrás de la onda de choque reflejada.
- $s$  , Magnitudes calculadas detrás de la onda de choque implosiva.
- $1,2$  , Estado del fluido delante y detrás de una onda de choque respectivamente (excepto  $(V_{1,2}^*, Z_{1,2}^*)$ )
- $\infty$  , Constantes de integración (ec. (III.25)).

### Capítulo V

- $E, G$  , Constantes ecuación (V.30).
- $f$  , Definido como  $p/\rho_0 D^2$ .
- $R_s$  , Posición de la onda de choque.

- $R_0$  , Posición de la superficie exterior en el instante inicial.
- $X, Y, W$  , Constantes que determinan  $R_1$ .
- $x_s$  , Definido como  $(R_s - R_0)/R_0$ .
- $\alpha, \beta, \delta$  , Coeficientes que aparecen en la determinación de  $\psi$ ,  $f$  y  $\phi$ , respectivamente.
- $\phi$  , Definido como  $u/D$ .
- $\psi$  , Definido como  $\rho/\rho_0$ .
- $\xi$  , Definido como  $(r - R_0)/(R_s - R_0)$ .

### Subíndices

- $\ell$  , Superficie exterior.
- $0$  , Primera aproximación (excepto  $\rho_0$  y  $R_0$ ).
- $1$  , Términos de orden  $x_s$  (excepto  $\alpha_1, \beta_1, \delta_1$ )
- $2$  , Términos de orden  $x^2$  (excepto  $\alpha_2, \beta_2, \delta_2$ )

Esta lista de símbolos corresponde a los más utilizados. Otros símbolos que aparecen están explicados en el texto.

## I. INTRODUCCIÓN

## I. INTRODUCCIÓN

Una posible fuente de energía en el futuro puede ser la fusión nuclear, por proporcionar energías por unidad de volumen mucho mayores que las que se obtendrían de otras fuentes energéticas como la solar o geotérmica.

La fusión nuclear a escala macroscópica solamente es posible en plasmas con temperatura iónica muy elevada debido a la barrera de Coulomb. El único método de obtener una reacción de fusión nuclear consiste en calentar un plasma a una temperatura muy alta, y confinarlo durante un tiempo suficiente para que la reacción tenga lugar. Una mezcla de isótopos de hidrógeno (deuterio y tritio), calentada hasta conseguir temperaturas iónicas del orden de  $10^8$  °K, puede dar lugar a reacciones de fusión apreciables (Glasstone, S. y Lovberg, R.H.; 1960).

La energía producida en una reacción de fusión nuclear es proporcional al cuadrado de la densidad y al tiempo de confinamiento, mientras que la energía térmica almacenada por el calentamiento del plasma es proporcional a la densidad. Para obtener energías liberadas en la fusión superiores a las suministradas para calentar el plasma, el producto de la densidad por el tiempo de confinamiento ha de ser, por lo tanto, superior a un cierto valor (del orden de  $10^{14}$  cm<sup>-3</sup> .seg, ). Este último es el llamado "criterio de Lawson" (Lawson, J.D.; 1957), (Brueckner, K.A, y Jorna, S. ; 1974) .

Hay dos tipos esenciales de reactores de fusión nuclear basados, el primero en el confinamiento magnético (tokamak, theta-pinch, magnetic-mirror), y el segundo en el confinamiento inercial (compresión inducida por radiación láser).



En los sistemas de confinamiento magnético el plasma ha de mantenerse, con la configuración deseada, mediante fuerzas electromagnéticas durante el tiempo suficiente para que se cumpla el criterio de Lawson, que es grande frente al tiempo característico de expansión. Para disminuir el tiempo necesario de confinamiento debería aumentarse la densidad del plasma, lo que implica aumentar la presión magnética que está limitada por las intensidades del campo magnético que se pueden alcanzar (Gough, W. y Eastlund, B.; 1971), (Ribe, F.L.; 1975).

En la fusión con láser el tiempo de confinamiento es del orden del tiempo característico de expansión hidrodinámica y, para asegurar que se cumple el criterio de Lawson, conviene operar con densidades suficientemente altas (del orden de  $10^3$  ó  $10^4$  veces la del estado sólido), (Nuckolls, J. y otros; 1972), (Emmett, J.L. y otros; 1974), (Brueckner, K.A\* y Jorna, S.; 1974).

Una rápida deposición de energía en la superficie exterior de una bola produce una ablación violenta del material de esta superficie. El material vaporizado viaja hacia el exterior generando, por reacción, fuerzas de presión que comprimen al material interior. Si la compresión inicial es muy brusca, se origina una onda de choque que se propaga hacia el interior amplificándose por efecto de la convergencia geométrica. Esta onda de choque calienta y comprime al material a la vez que lo deja en movimiento hacia el interior. La onda de choque va seguida por ondas de compresión, generadas como consecuencia de la convergencia del movimiento impuestas por la geometría, y por ondas de expansión si la presión exterior sobre la esfera no au-

menta rápidamente con el tiempo. Cuando la onda de choque llega al centro se refleja, propagándose hacia el exterior e incrementando de nuevo la densidad del material, si bien esta onda va seguida por ondas de expansión que por una parte disminuyen la densidad y por otra atenúan la onda de choque explosiva.

El incremento de densidad conseguido mediante una onda de choque está limitado en el sentido de que, aún con presiones infinitas, la densidad máxima está limitada; según se deduce de la relación de Hugoniot,  $p(\rho)$ , que liga la presión  $p$  con la densidad  $\rho$  a un lado de la onda de choque, cuando se conoce el estado termodinámico; al otro lado de ella (Courant, R. y Friedrichs, K.O.; 1948), (Landau, L.D. y Lifshitz, E.M.; 1959).

En la compresión mediante una onda de choque no se consiguen densidades muy altas, por lo que no se llega a alcanzar el valor necesario para que se produzca la fusión nuclear (Brueckner, K.A. y Jorna, S.; 1974). Sin embargo, sería posible conseguir la fusión en un sistema mixto fisión-fusión. En este tipo de sistemas el núcleo central de la bola está compuesto por un material fisionable (uranio, plutonio) rodeado de deuterio-tritio. La onda de choque, y ondas de compresión posteriores, incrementan la densidad de la esfera central hasta que su masa se convierte en crítica para producirse la fisión nuclear. La energía liberada en la fisión da lugar a una compresión explosiva del deuterio-tritio que inicia la fusión.

Las densidades altas que se necesitan en la fusión con láser, se pueden conseguir mediante una serie de ondas de choque consecutivas; sin embargo, el proceso de compresión más efectivo es aquel en el que dicha compresión se realiza de forma isen-

trópica. Teóricamente se podrían alcanzar densidades infinitas si el pulso del láser, que calienta la superficie exterior, es tal que las ondas de compresión, que se propagan hacia el interior de la bola, no se alcanzan hasta que llegan al centro de simetría. Todo el proceso implosivo de compresión se realiza sin degradación de energía (entropía constante), por lo que las densidades conseguidas son mucho más altas, para la misma presión máxima, que cuando hay ondas de choque.

La compresión isentrópica puede realizarse de tal modo que el tiempo característico de compresión sea grande frente al tiempo característico de propagación de las ondas de compresión a través de la esfera. En estas condiciones, para conseguir densidades altas es necesario que transcurran tiempos grandes, lo que implica suministrar grandes cantidades de energía mediante el láser, puesto que la presión de ablación es de algún modo proporcional a la potencia de la intensidad de la luz absorbida (Kidder, R.E.; 1971). Cuando se quieren conseguir densidades altas, mediante una compresión isentrópica del material en el menor tiempo posible, ha de darse una ley exterior de presiones muy particular.

En el capítulo II de este trabajo se ilustra el carácter de los movimientos simétricos e isentrópicos de compresión planos, cilíndricos o esféricos de un material con ecuaciones de estado arbitrarias, mediante la solución aproximada para procesos de compresión lentos y algunas soluciones exactas para compresiones planas rápidas. En particular se obtiene la solución exacta de las ecuaciones del movimiento correspondiente a la compresión isentrópica, con densidad espacial uniforme, de

una esfera. Esta solución es un caso particular de las dadas por Kidder, (Kidder, R.E.; 1974), y no discutida como tal caso particular por este autor en su trabajo. La solución obtenida por Lengyel, (Lengyel, L.L.; 1973), correspondiente a una compresión plana centrada, cuando las ondas de compresión que parten de la superficie exterior llegan simultáneamente al plano de simetría, se generaliza para ecuaciones de estado arbitrarias.

A continuación, en el capítulo III, se da la solución de semejanza, como límite asintótico intermedio de la solución más general (Barenblatt, G.I. y Zel'dovich, Ya.B.; 1972), correspondiente a las últimas etapas de la compresión de una esfera (cilindro) mediante una onda de choque, válida para distancias,  $r$ , al centro pequeñas frente a su radio inicial y cuando el radio de la onda es también pequeño, siempre que la relación de calores específicos,  $\gamma$ , sea constante. Esta solución auto-semejante está determinada a excepción del exponente  $a$ , que determina la dependencia temporal del radio de la onda, y que se obtiene, como función de  $\gamma$ , al mismo tiempo que la solución al exigir la existencia y continuidad de dicha solución autosemejante.

Este problema fue estudiado inicialmente por Guderley, (Guderley, G.; 1942), presentando los resultados correspondientes a  $\gamma = 1.4$ . Los cálculos de Guderley fueron reproducidos por Butler, (Butler, D.S.; 1954), dando la solución numérica para

---

(\*) A muy altas presiones y densidades, el sólido puede considerarse como un fluido con  $\gamma$  aproximadamente constante (Zel'dovich, Ya.B. y Raizer, Yu.P.; 1967).

$\gamma=5/3$  (simetría esférica). Posteriormente se ha obtenido la solución numérica total o parcial, siguiendo el esquema de Guderley, para  $\gamma=1.2$ ,  $1.4$  y  $5/3$ , (Stanyukovich, K.P.; 1960), (Somon, J.P. y otros; 1962), (Sigmar, D.I. y Joyce, Gv; 1971), (Somon, J.P.; 1971), (Goldman, E.B.; 1973), (Ishiguro, Y. y Katsuragi, S.; 1976). Cuando se pretende obtener la solución para valores de  $\gamma$  superiores a un valor crítico  $\gamma_c$ , el esquema de las singularidades en el plano de las variables de semejanza, plano de las fases, es distinto al dado por Guderley. El valor de  $\gamma_c$  fue acotado por Welsh, (Welsh, R.L.; 1967), dando el valor de  $a$  para  $\gamma=3$ . Una expresión analítica aproximada del valor de  $\alpha(\gamma)$  fue obtenida por Whitham, (Whitham, G.B.', 1974).

En nuestro trabajo se da una descripción completa de la posición y tipo de singularidad de cada uno de los puntos singulares del plano de las fases para todos los valores de  $\gamma$ . Se calcula el valor de  $\gamma_c$  en los casos de simetría cilíndrica y esférica y se dan las distribuciones espaciales y temporales de velocidad, presión y densidad para varios valores de  $\gamma$ , incluyendo el valor de  $a(\gamma)$  para una gran variedad de valores de  $\gamma$ . También se muestra la existencia de soluciones débiles (soluciones con discontinuidades débiles en superficies características) con valores arbitrarios, dentro de ciertos márgenes, del exponente  $a$  cuando  $\gamma > \gamma_c$ . Se obtienen también las soluciones asintóticas válidas para  $(\gamma-1)$  y  $1/\gamma$  tendiendo a cero.

La solución de semejanza correspondiente a la compresión isentrópica plana, cilíndrica o esférica, a partir de condiciones iniciales de densidad uniforme y velocidad nula se da en el capítulo IV. Este tipo de solución autosemejante, caso par

ticular de las soluciones catalogadas por Courant y Friedrichs y por Sedov, (Courant, R. y Friedrichs, K.O.; 1948), (Sedov, L. I.; 1959), es de las llamadas de primera clase (Barenblatt, G. I. y Zel'dovich, Ya.B.; 1972), puesto que el exponente  $\alpha$  puede determinarse por consideraciones de análisis dimensional. Como parte de la solución se obtiene la ley temporal de presiones exteriores a que ha de someterse la esfera para que el proceso de compresión sea el dado por la ley de semejanza. Con este tipo de compresión se consiguen densidades tanto más altas cuanto mayor sea la presión máxima exterior (Ferro Fontan, C. y otros; 1975). En este trabajo damos la forma asintótica de estas soluciones para valores grandes de la densidad final a alcanzar, mostrando la relación de esta solución asintótica con la solución dada por Kidder, (Kidder, R.E.; 1974).

Por último, en el capítulo V, se estudian las primeras etapas del proceso implosivo establecido en una bola o cilindro por la aplicación brusca de una presión uniforme en toda la superficie exterior, que posteriormente varía con el tiempo siguiendo una ley determinada. En este caso se origina en el instante inicial una onda de choque que viaja hacia el interior, cuya evolución así como las distribuciones de velocidad, presión y densidad, se determinan para tiempos pequeños. El análisis se hace para formas arbitrarias de las ecuaciones de estado, ha-

---

(\*) Una descripción analítica de las primeras etapas del proceso implosivo de una onda de choque con simetría cilíndrica o esférica en un gas perfecto, originada por la deposición instantánea y uniforme de una cantidad finita de energía por unidad de área en un radio finito  $R_0$ , fue dada por Bach y Lee, (Bach, G.G. y Lee, J.H.; 1969).

ciando aplicación al caso de un gas perfecto y al caso en que una de las ecuaciones de estado se pueda sustituir por una relación lineal (experimental) entre la velocidad de propagación de la onda y la velocidad del material inmediatamente detrás de ella, (Rice, M.H. y otros; 1953), (Zel'dovich, Ya.B. y Raizer, Yu.P.; 1967).

II. INTRODUCCIÓN A LOS MOVIMIENTOS  
SIMÉTRICOS DE COMPRESIÓN.



## II.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo ilustraremos el carácter de los movimientos simétricos de compresión, planos cilíndricos o esféricos, cuando el material a comprimir, con ecuaciones de estado arbitrarias, es sometido a una ley de presiones exterior que dé lugar a densidades muy altas respecto a la densidad inicial, sin aparición de ondas de choque que ocasionen variaciones de entropía.

Con este objeto empezaremos a describir el proceso de compresión de una bola cuando su superficie exterior es sometida a una presión creciente con el tiempo hasta el valor necesario para conseguir la densidad deseada, en el supuesto de que el tiempo de compresión es grande frente al tiempo de propagación del sonido a través de la bola,

A continuación presentaremos algunas soluciones exactas de movimientos de compresión planos, para mostrar cómo ha de evolucionar la presión exterior, si se quiere alcanzar densidades altas mediante una compresión isentrópica del material en el menor tiempo posible. En particular generalizaremos, para ecuaciones de estado arbitrarias, la solución obtenida por (Lengyel, L.L.; 1973) correspondiente a una compresión plana centrada, cuando las ondas de compresión que parten de la superficie llegan simultáneamente al centro. También presentaremos otras soluciones exactas correspondientes a procesos de compresión más lentos, que después de un período de transición, terminan en un movimiento de compresión con densidad espacialmente uniforme.

## II.2. ECUACIONES

Las ecuaciones que determinan el proceso de compresión simétrico de una bola, cilindro o placa, en el supuesto de que, en virtud de los valores altos de las presiones alcanzadas, el material se comporte como un fluido, son las siguientes:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^j} \frac{\partial}{\partial r} (r^j \rho u) = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0 \quad (\text{II.2})$$

$$S(P, \rho) = S(c, \rho) = S_0 \quad (\text{II.3a})$$

o lo que es equivalente, conocida la entropía inicial  $S$ , supuesta uniforme, a

$$p = p(\rho), \quad c = c(\rho) \quad (\text{II.3b})$$

conocida, mediante las ecuaciones de estado, la isentrópica  $p(\rho)$  correspondiente a  $S$ , la velocidad del sonido viene dada por

$$c(\rho) = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_{S=S_0}$$

En las ecuaciones anteriores se han despreciado los efectos viscosos y de conducción de calor, por suponer el número de Reynolds característico muy alto. Las condiciones iniciales serán  $\rho = \rho_0$ ,  $u = 0$  correspondiente a una bola de densidad uniforme de radio inicial  $R_0$ . Cuando su superficie se somete a una presión exterior  $p_e(t)$ , lo que implica que en la superficie de radio  $R(t)$ ,  $\rho = \rho_e(t)$ , dada por  $p_e = p(\rho_e)$  y  $u = dR/dt$ ; complementándose así las condiciones de contorno que determinan la solución de las ecuaciones anteriores.

### II.3. COMPRESIÓN ISENTROPICA LENTA

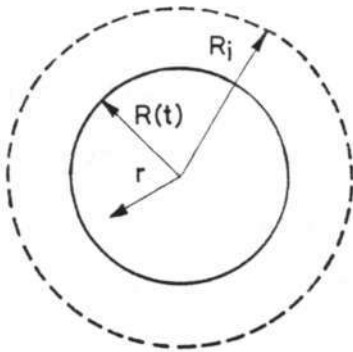
En este apartado resolveremos el caso en que se comprime una bola de radio inicial  $R_i$ , mediante una ley de presión exterior  $p_e(t)$  tal que el tiempo característico de variación de esta presión, sea grande comparado con el tiempo de propagación de las ondas de compresión a través de la bola. De esta forma, el movimiento puede considerarse isentrópico y la presión y densidad espacialmente uniformes en primera aproximación. Esto es  $\rho = \rho_e(t)$  y de acuerdo con (II.2) se obtiene

$$u = u_o = - \frac{r}{(j+1)} \frac{d}{dt} (\ln \rho_e) \quad (\text{II.4})$$

mientras que el principio de conservación de la masa (II.1) escrito en forma integral nos da

$$R_o/R_i = (\rho_i/\rho_e)^{1/(j+1)} \quad (\text{II.5})$$

donde las magnitudes con subíndice "o" indican la primera aproximación; con subíndice i indican el estado inicial  $t=0$ ; y con subíndice "e" indican el estado en la superficie exterior  $R(t)$ .



Introduciendo el valor de  $u_o(r,t)$  dado en (II.4), en la ecuación (II.2), se obtiene la corrección de la densidad como función del radio y del tiempo

$$\frac{\rho_e - \rho}{\rho_e} = \frac{(R_o^2 - r^2)A(t)}{2(j+1)R_i^2} \quad (\text{II.6})$$

donde

$$A(t) = \frac{R_i^2}{c_i^2} \left\{ \frac{d^2(\ln \rho_e)}{dt^2} - \frac{1}{j+1} \left[ \frac{d(\ln \rho_e)}{dt} \right]^2 \right\} \quad (\text{II.7})$$

La corrección al radio exterior  $R(t) = R_0(t) + R_1(t) + \dots$ , con  $R_1(t) \ll R_0(t)$ , puede obtenerse de nuevo, con ayuda de (II.6), mediante el principio de conservación de la masa

$$(R_1/R_0) = \{A(t)/(j+1)^2(j+3)\}(R_0/R_1)^2 \quad (\text{II.8})$$

De acuerdo con la hipótesis hecha inicialmente  $A(t) \sim (R_1/c_1 t_0)^2$  ha de ser pequeño frente a la unidad. Es posible obtener densidades finales tan altas como se quiera sin dejar de cumplir la condición  $A(t) \ll 1$ , con tal que el tiempo característico  $t$  de compresión sea grande. Para asegurar que se cumple la condición inicial de densidad uniforme y velocidad nula,  $A(t)$  ha de ser nula en el instante inicial.

Las perturbaciones son nulas cuando  $A(t)=0$ , y entonces la solución puede escribirse:

$$\rho(t_m - t)^{(j+1)} = m ; \quad u = -r/(t_m - t) , \quad (\text{II.9})$$

que representa una compresión con densidad espacial uniforme, y es solución exacta de las ecuaciones (II.1-2). El inconveniente de esta solución exacta es que no cumple la condición inicial usual de densidad uniforme con velocidad nula, por lo que sería necesario empalmarla con una solución que, cumpliendo la condición inicial, nos proporcione la transición a esta solución. Obtendremos más adelante esta solución de transición para el caso plano. En la solución (II.9),  $m$  es una constante y  $t$  el instante final de la compresión.

---

(\*) Otras soluciones exactas, para  $Y$  constante, dadas por (Kidder, R.E.; 1974) tampoco cumplen estas condiciones iniciales. La solución (II.9) es un caso particular ( $t_0$  ;  $b=-1$ ) de estas soluciones, no discutido por Kidder.

#### II.4. COMPRESIÓN PLANA CON ONDAS SIMPLES

Si se buscan soluciones de las ecuaciones (II.1-2), para  $j=0$  (caso plano), tales que  $u=u(p)$ , de estas dos ecuaciones obtenemos dos ecuaciones para  $p$  que han de coincidir, para lo cual se ha de cumplir

$$u = \pm \int_{p_0}^p c(p) dp / p \quad (\text{II.10})$$

quedando las ecuaciones (II.1-2) reducidas a

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \{u(p) \pm c(p)\} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (\text{II.11})$$

cuya solución general es de la forma

$$p = p[r - \{u(p) \pm c(p)\}t] \quad (\text{II.12})$$

donde las funciones  $c(p)$  y  $u(p)$  están dadas en (II.3b) y (II.10) respectivamente. La solución general (II.12) representa un sistema de ondas que viaja hacia la derecha cuando se elige el signo más, o hacia la izquierda si se elige el signo menos. La solución (II.12) deja de ser válida, y el sistema de ondas deja de ser simple, cuando las características, obtenidas al dar valores constantes al argumento de  $p$ , se cortan (dando lugar a ondas de choque) o cuando la primera de ellas, que inicia el movimiento, alcanza el origen y da lugar a ondas reflejadas.

Para describir un proceso de compresión plano, de una placa situada en  $r>0$ , elegiremos la solución correspondiente a ondas simples que viajan hacia la izquierda; esto es, utilizaremos el signo menos en (II.10) y (II.12). Si buscamos una solución correspondiente a un modo de compresión isentrópica del material hasta densidades tan grandes como queramos, en el menor

tiempo posible, hemos de presionar la placa desde el exterior de manera que las características corten todas en  $t=0$ ,  $r=0$ . Esto es, ha de ponerse una ley exterior de presiones tal que

$$R/t = u(\rho_e) - c(\rho_e) \quad (\text{II.13a})$$

siendo

$$dR/dt = u(\rho_e) \quad (\text{II.13b})$$

cuya solución es

$$t/t_o = (\rho_o/\rho_e)\{c_o/c(\rho_e)\} \quad (\text{II.14a})$$

$$R/c_o t_o = \{ [u(\rho_e)/c(\rho_e)] - 1 \} (\rho_o/\rho_e) \quad (\text{II.14b})$$

siendo la velocidad

$$u(\rho_e) = - \int_{\rho_o}^{\rho_e} c(\rho) d\rho / \rho \quad (\text{II.14c})$$

donde la velocidad del sonido  $c(p)$  puede calcularse conociendo la ecuación  $p(p)$  de las isentrópicas que proporciona la ecuación de estado.

La relación (II.14a) proporciona, junto con las relaciones isentrópicas (II.3b), la ley exterior de presiones; en el caso particular de un gas perfecto, se obtiene

$$p_e/p_o = (t_o/t)^{2\gamma/(\gamma+1)}$$

La relación (II.14b) determina la evolución del radio de la bola, que en el caso de un gas perfecto es

$$\frac{R}{c_o t} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left[ \frac{2}{\gamma+1} - \left( \frac{t_o}{t} \right)^{(\gamma-1)/(\gamma+1)} \right]$$

La trayectoria de una partícula fluida interior y su densidad están también determinadas por las relaciones (II.14) en la forma

$$t/t_i = (\rho_0/\rho)\{c_0/c(\rho)\}$$

$$r/r_i = \{[u(\rho)/c(\rho)] - 1\}(\rho_0/\rho)$$

siendo  $t$ . el instante en que la partícula es alcanzada por la primera onda de compresión y  $r_i = -c_0 t_i$ . Dividiendo las ecuaciones anteriores, puede observarse que la relación de densidades  $\rho/\rho_0$  es sólo función de  $r/c_0 t$ , siendo por lo tanto una solución de semejanza. Este tipo de solución autosemejante, que corresponde a una compresión isentrópica rápida, se generalizará a los casos cilíndrico ( $j=1$ ) y esférico ( $j=2$ ) en el capítulo IV.

Si la ley exterior de presiones es más rápida que la que origina unas trayectorias como las dadas en (II.14), las ondas de compresión se alcanzan antes de llegar a  $t=0$ ,  $r=0$  originando una onda de choque tal como se muestra esquemáticamente en la Fig. II.1a. Cuando la ley de presiones exteriores es más lenta, las ondas de compresión no se alcanzan, tal como se indica en la Fig. II.1b.

Cuando la ley de presiones exteriores es la apropiada a las ecuaciones (II.14) todas las ondas de compresión se alcanzan en  $t=0$ ,  $r=0$  (Fig. II.2). Si esta ley de presiones se interrumpe de forma tal que se mantiene constante a partir de un instante dado, dejan de salir ondas de compresión hacia el origen pero

---

(\*) Es posible encontrar una ley de presiones exteriores mediante la cual se consiga que todas las ondas de compresión, reflejadas en el plano de simetría (Fig. II.1), coincidan en un punto en el mismo instante, dejando al fluido con densidad uniforme en ese instante, sin más que adaptar la solución, para  $Y$  constante, dada por (Landau, L.D. y Lifshitz, E.M.; 1959) pág. 391.

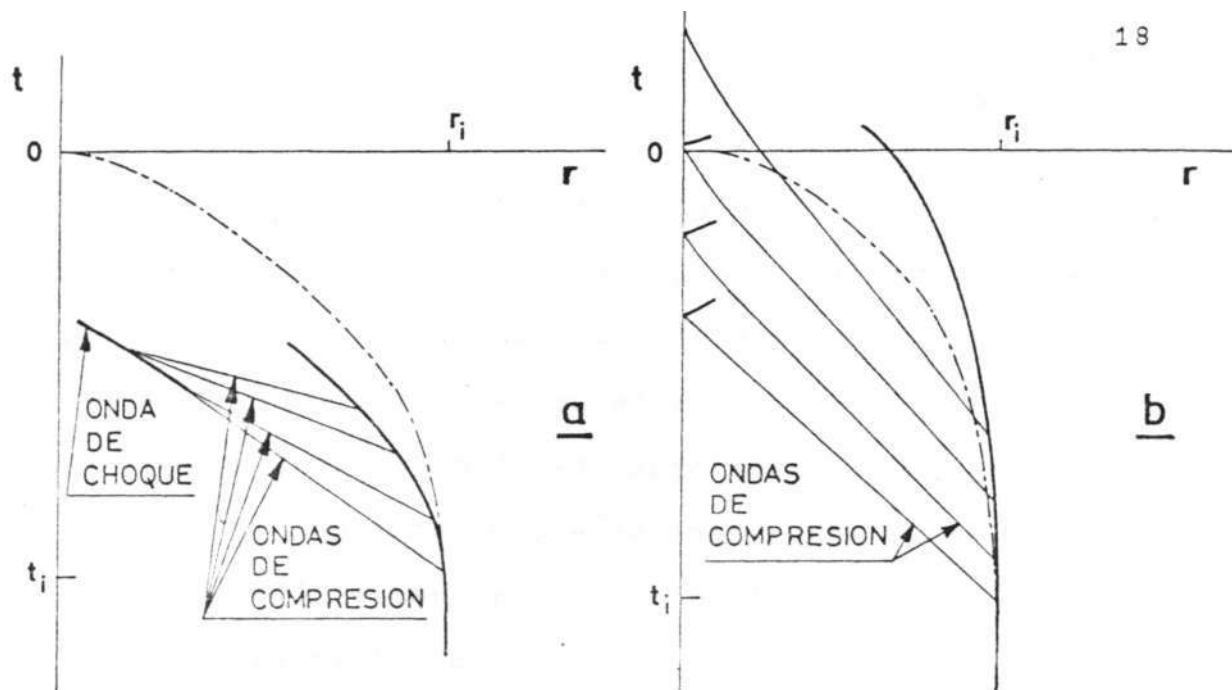


Fig. II.1.- Esquema de las compresiones rápidas (a) y lentas (b). La línea discontinua representa la trayectoria apropiada para que las ondas de compresión se alcancen en el origen.

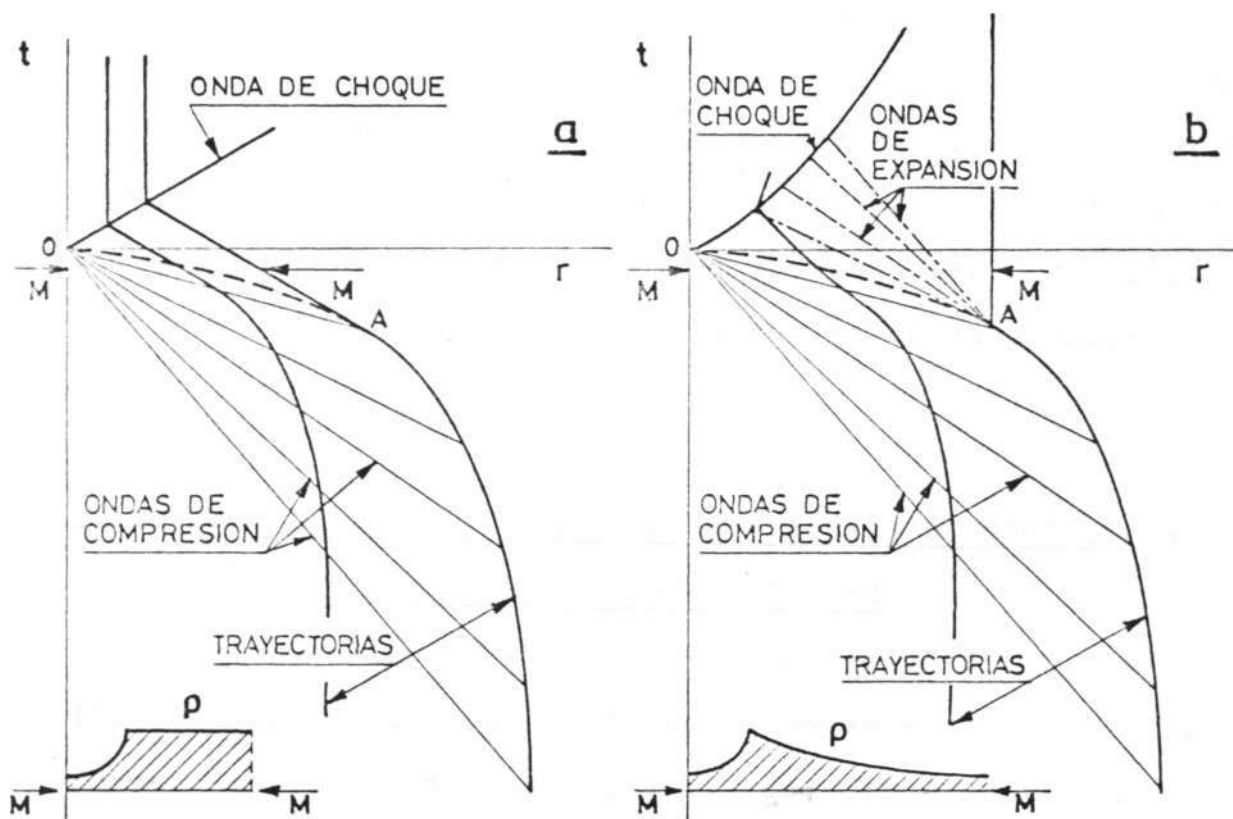


Fig. II.2.- Onda de compresión centrada, (a) la presión se mantiene a partir de A en el valor alcanzado, (b) en A la presión se reduce a la inicial bruscamente. Los perfiles de densidad corresponden al mismo instante en ambos casos (instante M-M).



el fluido sigue moviéndose hacia el interior con velocidad constante, hasta que es alcanzado por la onda de choque que se originó al encontrarse las ondas de compresión anteriores, dejando lo en reposo; este caso es el representado en la Fig. II.2a. La densidad final obtenida es tanto más alta cuanto más próximo a  $t=0$  sea el instante en que se interrumpe la ley de crecimiento de la presión exterior. En la región del plano  $(r,t)$  limitada por la característica AO y la onda de choque la densidad es constante; la onda de choque produce una compresión adicional no isentrópica.

En la Fig. II.2b se ha esquematizado el caso en que la presión exterior se interrumpe en un instante dado (punto A), bajándola al valor que tenía originalmente antes de comenzar la compresión. En este caso se forma también una onda de choque a causa de las ondas de compresión que se alcanzan en el origen, pero a su vez se origina un abanico de expansión que va frenando al fluido hasta que lo deja en reposo; siendo después alcanzado por la onda de choque, que a su vez se va debilitando a causa de la expansión.

#### II.5. ONDA SIMPLE QUE GENERA UN MOVIMIENTO DE COMPRESIÓN PLANO CON DENSIDAD ESPACIALMENTE UNIFORME

La solución exacta de las ecuaciones (II.1-2) dada en (II.9) corresponde a un movimiento convergente de densidad uniforme. Esta solución no cumple la condición inicial usual de densidad uniforme con velocidad nula. En el caso plano ( $j=0$ ) esta solución puede empalmarse con la solución correspondiente a una onda simple dada en (II.12), que se encarga de la transición des-

de las condiciones iniciales. Considerando el tiempo medido desde el instante en que el movimiento convergente llega a  $r=0$ , las soluciones anteriores pueden escribirse:

a) Movimiento convergente

$$u = r/t \quad (\text{II.15a})$$

$$\rho = -m/t \quad (\text{II.15b})$$

b) Onda simple

$$\rho = \rho\{r - [u(\rho) - c(\rho)]t\} \quad (\text{II.16a})$$

$$u = - \int_{\rho_0}^{\rho} c(\rho) d\rho / \rho \quad (\text{II.16b})$$

Si llamamos  $r.Ct.$ ) a la ecuación de la primera característica reflejada, correspondiente a la solución (II.16), donde se realiza el empalme con (II.15) (Fig. II.3), su ecuación está dada por

$$dr_1/dt_1 = u + c \quad (\text{II.17})$$

cuyo segundo miembro, de acuerdo con (II.15a) y (II.16b) que proporciona  $c(u)$ , puede escribirse

$$dr_1/dt_1 = r_1/t_1 + c(r_1/t_1) \quad (\text{II.18a})$$

con las condiciones iniciales

$$t_1 = t_0, \quad r_1 = 0 \quad (\text{II.18b})$$

Conocida la ecuación de la característica (II.18) donde se realiza el empalme de ambas soluciones, podemos calcular la solución en la región de transición donde el movimiento está representado por una onda simple. La velocidad y densidad son constantes en una región a lo largo de las características; esto es,  $u = r_1/t_1$  en

$$r - r_1 - (u_1 - c_1)(t - t_1) = 0 \quad (\text{II.19})$$

de modo que se dispone así de una representación paramétrica de la solución en la región de transición.

Las trayectorias en la parte correspondiente al movimiento convergente, son líneas rectas Cec. (II.16a)). En la zona correspondiente a la onda simple, la ecuación  $r_0(t_0)$  de las trayectorias está dada por

$$dr_2/dt_2 = r_1/t_1 \quad (\text{II.20})$$

donde  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $t_1$  y  $t_2$  están relacionadas entre sí por la ecuación (II.19) particularizada para  $r_2$ ,  $t_2$ ; es decir

$$(r_1 - r_2)/(t_1 - t_2) = r_1/t_1 - c(r_1/t_1) \quad (\text{II.21})$$

sustituyendo el valor de  $r_1/t_1$  dado en (II.21) en la ecuación (II.20), teniendo en cuenta el valor de  $r_1(t_1)$  deducido de (II.18), se puede determinar el valor  $r(t)$ . Con  $r(t)$  y  $r \ll (tJ$  sustituidos en (II.21) proporcionan  $t_2(t_1)$ . La constante de integración de (II.20) se determina para cada posible trayectoria por la condición  $r_2 = r_1$  en  $t_2 = t_1$ .

Para el caso de un gas perfecto, la solución de (II.18) es

$$\frac{\gamma-1}{2} \frac{r_1}{c_0(-t_0)} = \frac{t_1}{(-t_0)} + \left(\frac{t_1}{t_0}\right)^{(3-\gamma)/2}$$

que junto con

$$\frac{dr_2}{dt_2} = \frac{r_1}{t_1}$$

$$\frac{r_1 - r_2}{t_1 - t_2} = \frac{3-\gamma}{2} \frac{r_1}{t_1} - c_0$$

determinan las trayectorias. En la Fig. II.3 se han representa-

do las trayectorias correspondientes a  $\gamma=5/3$ , donde cualquiera de ellas puede representar la evolución de la superficie exterior  $R(t)$ , que tiene un movimiento acelerado desde el instante inicial hasta  $t=t_1$  permaneciendo después con velocidad constante hasta que alcanza el origen.

Si el radio inicial exterior es pequeño ( $R_i/c_0(-t_0) \ll 1$ ), tal como el indicado por A en la Fig. II.3, la compresión se realiza lentamente, puesto que el tiempo característico de variación de  $R(t)$ ,  $t$ , es grande comparado con el tiempo que tardan las ondas de compresión en recorrer la distancia  $R_i$ ,  $R_i/c_0$ , ( $t_c \sim t_0 \gg R_i/c_0$ ). Cuando esto ocurre, prácticamente todo el proceso de compresión corresponde al movimiento de compresión uniforme, y puede ser descrito como en el apartado II.3, ecuaciones (II.9).

Cuando el radio inicial exterior es grande ( $R_i/c_0(-t_0) \gg 1$ ), tal como el indicado por B, el tiempo necesario para la compresión se aproxima al tiempo que tarda la onda de compresión inicial en alcanzar el centro. Prácticamente todo el proceso de compresión se realiza mediante la onda simple puesto que  $r_1(t_1) \ll R$ , tendiendo esta solución a la correspondiente a la onda centrada (ecs. (II.14)) cuando  $R_i$ .

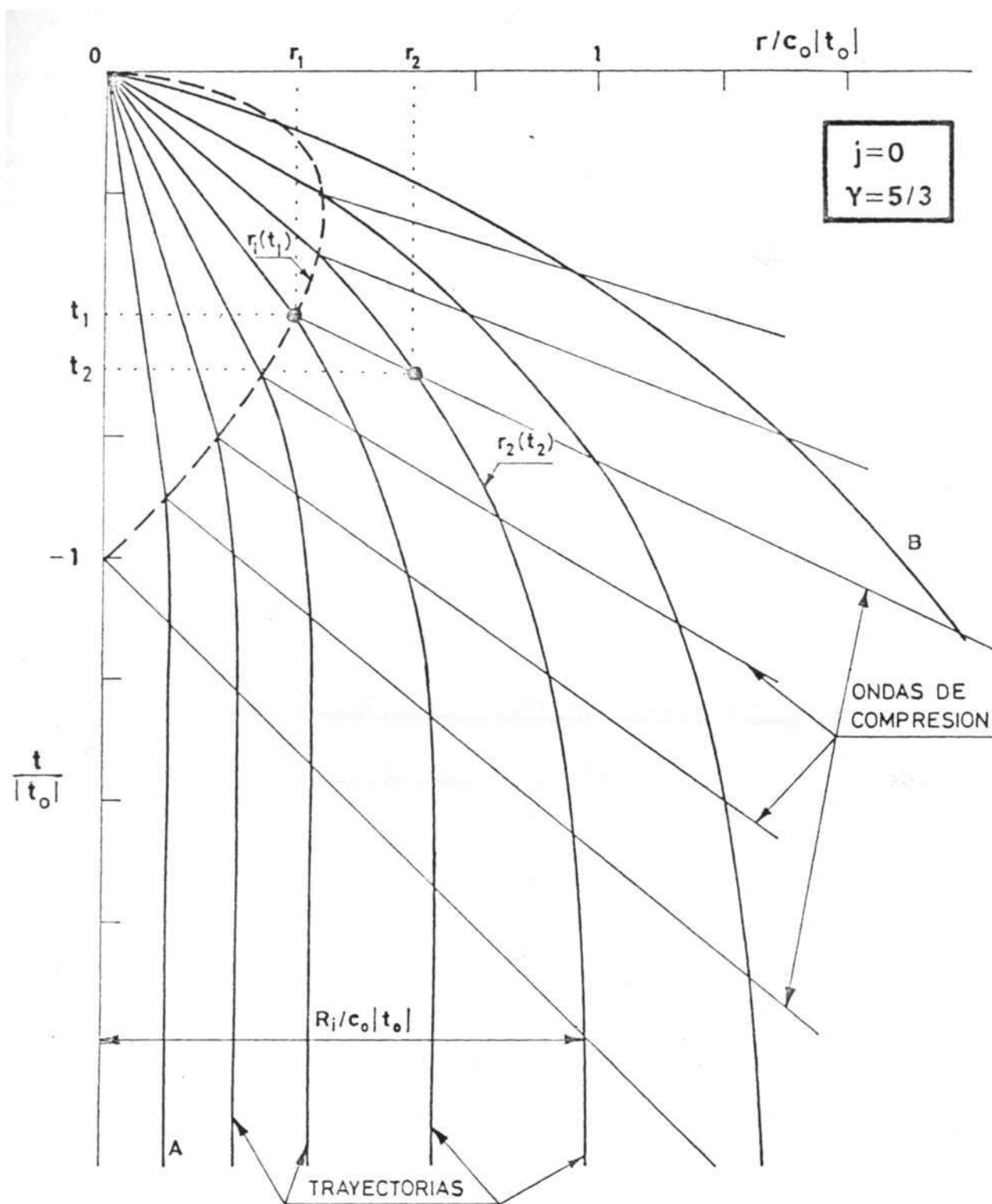


Fig. II.3.- Compresión mediante onda simple seguida de movimiento convergente. La característica reflejada donde se realiza el empalme de ambas soluciones es  $r_1(t_1)$ . La curva A representa la evolución de la superficie exterior cuando  $(R_i/c_0(-t_0)) \ll 1$  y la B en caso contrario.

III. COMPRESIÓN SIMÉTRICA MEDIANTE ONDA  
DE CHOQUE IMPLOSIVA

### III.1. INTRODUCCIÓN

Cuando se comprime una bola (cilindro) con una ley exterior de presiones tal que las ondas de compresión generen una onda de choque que inicia la compresión de las capas interiores, la solución tiende a una forma autosemejante, como demostró (Guderley, G.; 1942), para distancias  $r$  al centro de la bola pequeñas frente a su radio inicial y cuando el radio de la onda de choque, que toma una dependencia temporal de la forma  $(C(t_m - t))^a$ , es también pequeño, y siempre que la relación de calores específicos  $\gamma$  sea constante. Esta forma asintótica de la solución (que es solución de semejanza de las ecuaciones) está determinada a excepción del exponente  $a$ , que se obtiene, como función de  $\gamma$ , de la condición de existencia y continuidad de dicha solución autosemejante. Los factores de escala  $C$  y el instante en que la onda implosiva llega al centro  $t_m$ , se determinan acoplando la solución autosemejante con la solución numérica previa a ella.  $C$  y  $t_m$  no intervienen directamente en la solución de semejanza, puesto que es invariante frente a cambios de escala.

Para tiempos posteriores  $t > t_m$ , aparece una onda de choque explosiva originada por la reflexión, en el centro de simetría, de la onda implosiva. La dependencia temporal del radio de esta onda explosiva es de la forma  $\{C(t_m - t)\}^a$  y la solución sigue siendo autosemejante. La relación  $C/C$ , que depende de  $\gamma$ , se obtiene como parte de la solución de semejanza.

El valor del exponente  $a$  se ha determinado, en los casos cilíndrico y esférico, para los valores de  $\gamma = 1.2, 1.4, 5/3, 3$  e infinito y pueden encontrarse en la literatura. (Guderley, G.; 1942), (Butler, D.S.; 1954), (Stanyukovich, K.P.; 1960),

(Somon, J.P. y otros; 1962), (Welsh, R.L.; 1967), (Somon, J.P.; 1971), (Whitham, G.B.; 1974), (Ishiguro, Y. y Katsuragi, S.; 1976), (Liñán, A. y Rodríguez, M.; 1977).

En el presente capítulo se describe el procedimiento de cálculo de  $a$  y de las distribuciones de velocidad, densidad y presión para cualquier valor de  $\gamma$  tanto en el período implosivo como en el explosivo. Se muestra también cómo pueden calcularse las trayectorias de las distintas capas fluidas y la presión  $a$  que están sometidas, con lo cual puede determinarse la historia de la presión exterior que conduce a la solución de semejanza.

A partir de un cierto valor de  $\gamma > \gamma_c$ , se muestra la existencia de soluciones autosemejantes con discontinuidades débiles en superficies características, con un valor de  $a$  distinto al correspondiente para la solución continua del mismo  $\gamma$ . Estas soluciones de semejanza débiles sólo se obtendrían para una ley de presiones muy particular en la superficie exterior de la bola.

Por último, se da también la solución analítica asintótica correspondiente a  $(\gamma-1) \rightarrow 0$  y la solución numérica correspondiente a  $(1/\gamma) \rightarrow 0$ . En este último caso se da también el siguiente término del desarrollo en potencias de  $(1/\gamma)$  para las magnitudes más características del proceso implosivo y explosivo.

### III.2. ECUACIONES

La velocidad radial  $u$ , presión  $p$  y densidad  $\rho$ , como función de la posición  $r$  y del tiempo  $t$ , para el movimiento si-



métrico o unidimensional de un fluido, sin efectos viscosos ni conducción de calor, satisfacen las ecuaciones diferenciales, (Courant, R. y Friedrichs, K.O.; 1948), (Sedov, L.I.; 1959), (Stanyukovich, K.P.; 1960),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} + \frac{j \rho u}{r} = 0 \quad (\text{III.1})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (\text{III.2})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho \gamma} \right) + u \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p}{\rho \gamma} \right) = 0 \quad (\text{III.3})$$

considerando que la relación de calores específicos  $\gamma$  permanece constante. La ecuación (III.3) expresa el hecho de que la entropía de cada partícula es constante a lo largo de su trayectoria, pudiendo variar de una partícula a otra.

Buscaremos soluciones autosemejantes de las ecuaciones (III.1-3), que existen en virtud de la invariancia de las mismas ante grupos de transformaciones. En estas soluciones la velocidad, presión y densidad son funciones de la forma (Sedov, L. I. ; 1959) ,

$$u = (\alpha r/t) V(\lambda) \quad (\text{III.4})$$

$$p = (\rho/\gamma) (\alpha r/t)^2 Z(\lambda) \quad (\text{III.5})$$

$$\rho = \rho_0 R(\lambda) \quad (\text{III.6})$$

$$\lambda = r/|ct|^\alpha \quad (\text{III.7})$$

de la variable  $\lambda$ , donde el tiempo se considera medido desde el instante en que el frente de onda llega al centro de simetría ( $t < 0$  proceso implosivo,  $t > 0$  proceso explosivo). Las funciones (III.4-7) son las soluciones exactas de (III.1-3) correspondientes a condiciones iniciales (de densidad uniforme) y de contor-

no muy particulares; o bien, describen aproximadamente la forma de la solución en una pequeña región próxima al centro de simetría para unas condiciones iniciales y de contorno más generales. En estas soluciones, la constante  $C$  y el exponente  $a$ , dependen de las condiciones iniciales y de contorno.

Las ecuaciones que determinan  $V(\lambda)$ ,  $Z(\lambda)$  y  $R(\lambda)$  están dadas por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, que obtendremos introduciendo (III.4-7) en (III.1-3), tomando una forma algo más simple en función del parámetro  $\theta$ ,

$$\theta = (\alpha - 1)/\alpha \quad (\text{III.8})$$

estas ecuaciones son;

$$\frac{dZ}{dV} = \frac{Z}{V-1} \frac{2Z[(V-1)+\theta/\gamma] + \theta(V-1)[(\gamma-3)V+2] \cdot (V-1)^2 \{ [2+(\gamma-1)j]V-2 \}}{Z[(j+1)V+2\theta/\gamma] - V(V-1)(V-1+\theta)} \quad (\text{III.9})$$

$$\frac{d\{\text{Ln}R\}}{dV} = \frac{1}{V-1} \frac{V(V-1)[\theta - j(V-1)] - 2\theta Z/\gamma}{Z[(j+1)V+2\theta/\gamma] - V(V-1)(V-1+\theta)} \quad (\text{III.10})$$

$$\frac{d\{\text{Ln}\lambda\}}{dV} = \frac{(V-1)^2 - Z}{Z[(j+1)V+2\theta/\gamma] - V(V-1)(V-1+\theta)} \quad (\text{III.11})$$

El principio de conservación de la masa en forma integral da lugar a una relación  $F_1(\lambda, R, V, M)=0$ , donde  $M(\lambda)$  está dado por  $m/\rho_0 r^{(j+1)}$ , siendo  $m$  la masa contenida entre una superficie fija y la superficie correspondiente a un valor dado de  $\lambda$ , (Sedov, L.I.; 1959). La condición de que la entropía siguiendo a la partícula fluida se conserva, da lugar a la "integral adiabática"  $F_2(\lambda, R, Z, M)=0$ . Esta "integral adiabática" existe si no hay ningún valor de  $v$  tal que con  $\rho_0 C^v$  no se pueda obtener las dimensiones de masa, (Sedov, L.I.; 1959). Combinando las relaciones  $F_1(X, V, R, M)=0$  y  $F_2(X, R, Z, M)=0$ , se puede obtener una ecuación

ción algebraica  $F_3(\lambda, V, Z, R) = 0$ , que sustituye a una de las ecuaciones diferenciales (III.10) ó (III.11). Esta ecuación algébrica es :

$$Z\lambda^{2(1-\theta)} = KR^{(\gamma-1)} [R(1-V)]^{2\theta/(j+1)} \quad (\text{III.12})$$

donde K es una constante a determinar donde se conozca el valor de X, V, Z y R.

En la ecuación (III.9) intervienen solamente las variables Z y V, por lo que integrando esta ecuación obtendríamos  $Z=Z(V)$ , que llevado a (III.10-11) nos daría  $R(V)$  y  $X(V)$  respectivamente. Por otra parte, las ecuaciones (III.10-11) relacionan R y X con V y  $Z(V)$  a través de  $\ln R$  y  $\ln \lambda$ , y dado que  $\lambda$  y R contienen en sus definiciones (III.6-7) a los parámetros dimensionales C y p como factores, no intervienen en la solución salvo como factores de escala.

Las curvas integrales de (III.9), en el plano de las fases (V,Z), representan los posibles estados del fluido para distintos r dado t, o distintos t dado r. Las curvas están limitadas al semiplano  $Z > 0$ , pues la presión del gas no puede ser negativa.

### III.3. CONDICIONES DE SALTO EN UNA ONDA DE CHOQUE

Tanto si se buscan soluciones de semejanza correspondiente a la compresión isentrópica como a la compresión mediante onda de choque implosiva, aparecen discontinuidades u ondas de choque. Por lo tanto debemos conocer las relaciones generales que ligan a V, Z y R a ambos lados de la discontinuidad. La variable  $\lambda$  será continua a uno y otro lado de la onda, puesto

que dicha onda estará situada en la posición  $r = R(t) \sim t^a$ .

Las relaciones que ligan a  $V$ ,  $Z$  y  $R$  a uno y otro lado de la onda se obtienen a partir de las leyes de conservación de la masa, cantidad de movimiento y energía a ambos lados de la discontinuidad, (Courant, R. y Friedrichs, K.O.; 1948), (Landau, L.D. y Lifshitz, E.M.; 1959). Estas relaciones escritas en variables de semejanza son:

$$\frac{V_2 - 1}{V_1 - 1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right) \frac{Z_1}{(V_1 - 1)^2} \quad (\text{III.13})$$

$$Z_2 = \left[ \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (V_1 - 1) \right]^2 \left[ 1 - \left(1 - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\right) \frac{Z_1}{(V_1 - 1)^2} \right] \left[ \left(1 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\right) - \frac{Z_1}{(V_1 - 1)^2} \right] \quad (\text{III.14})$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1 - V_1}{1 - V_2} \quad (\text{III.15})$$

los subíndices 1 y 2 indican el estado del fluido a ambos lados de la onda de choque, antes y después de atravesarla, respectivamente.

Cuando el estado 1 corresponde a un fluido en reposo y considerando la onda muy intensa:  $Z_1 = V_1 = 0$  y  $R_1 = 1$ , las relaciones (III.13-15) se reducen a:

$$V_2 = 1 - (\gamma - 1) / (\gamma + 1) \quad (\text{III.16})$$

$$Z_2 = [(\gamma - 1) / (\gamma + 1)] [1 + (\gamma - 1) / (\gamma + 1)] \quad (\text{III.17})$$

$$R_2 = (\gamma + 1) / (\gamma - 1) \quad (\text{III.18})$$

Las condiciones (III.16-18) corresponden al estado del fluido después del paso de una onda de choque, que se mueve en un medio de reposo de densidad uniforme, con una velocidad  $D(t) = R(t)$ . La posición de esta onda de choque está dada según (III.

.7) por  $\lambda_s=1$ . Este es el caso de la onda de choque implosiva que, propagándose hacia el centro de simetría, inicia el proceso de compresión en las soluciones de semejanza de segunda clase, (Barenblatt, G.I. y Zel'dovich, Ya.B. ; 1972).

En el caso de una onda de choque que se origina en el centro de simetría por reflexión de las ondas de compresión (onda de choque explosiva), no se puede suponer en general que la onda sea intensa, y por lo tanto las relaciones (III.13-15) no admiten simplificación. La posición  $R(t)=(Ct)$  de esta onda de choque estará determinada por el valor  $X$  de  $X$ , antes de la onda, ya que según (III.7)  $C$ ,  $C$  y  $X$  cumplen la relación  $\lambda_r = |C|^\alpha$ .

Las relaciones (III.13-15), que indican cómo una onda de choque transforma el estado del fluido en la solución de semejanza, nos permite limitar las zonas de existencia de ondas de choque en el plano de las fases  $(V, Z)$ , (véase Fig. III.1).

Los puntos de la parábola  $Z_1=(V_1-1)^2$  (característica) se transforman en ellos mismos, puesto que esta relación escrita en variables físicas es:  $\gamma p/\rho=c^2=(u-D)^2$ , es decir, el movimiento del fluido relativo a la onda  $(u-D)$  es sónico. Cuando:  $Z_1>(V_1-1)^2$ ;  $c=\gamma p/\rho(u-D)^2$  el movimiento del fluido alcanzado por la onda y relativo a ella sería subsónico, por ello se excluye la existencia de ondas de choque en esta región. Por el contrario, si  $Z_1<(V_1-1)^2$  el movimiento relativo es supersónico y pueden existir ondas de choque en esta región.

Si el estado del fluido alcanzado por la onda corresponde a  $Z_1=0$ , esto es: presión nula; su estado después del paso de la onda está representado por puntos de la parábola:

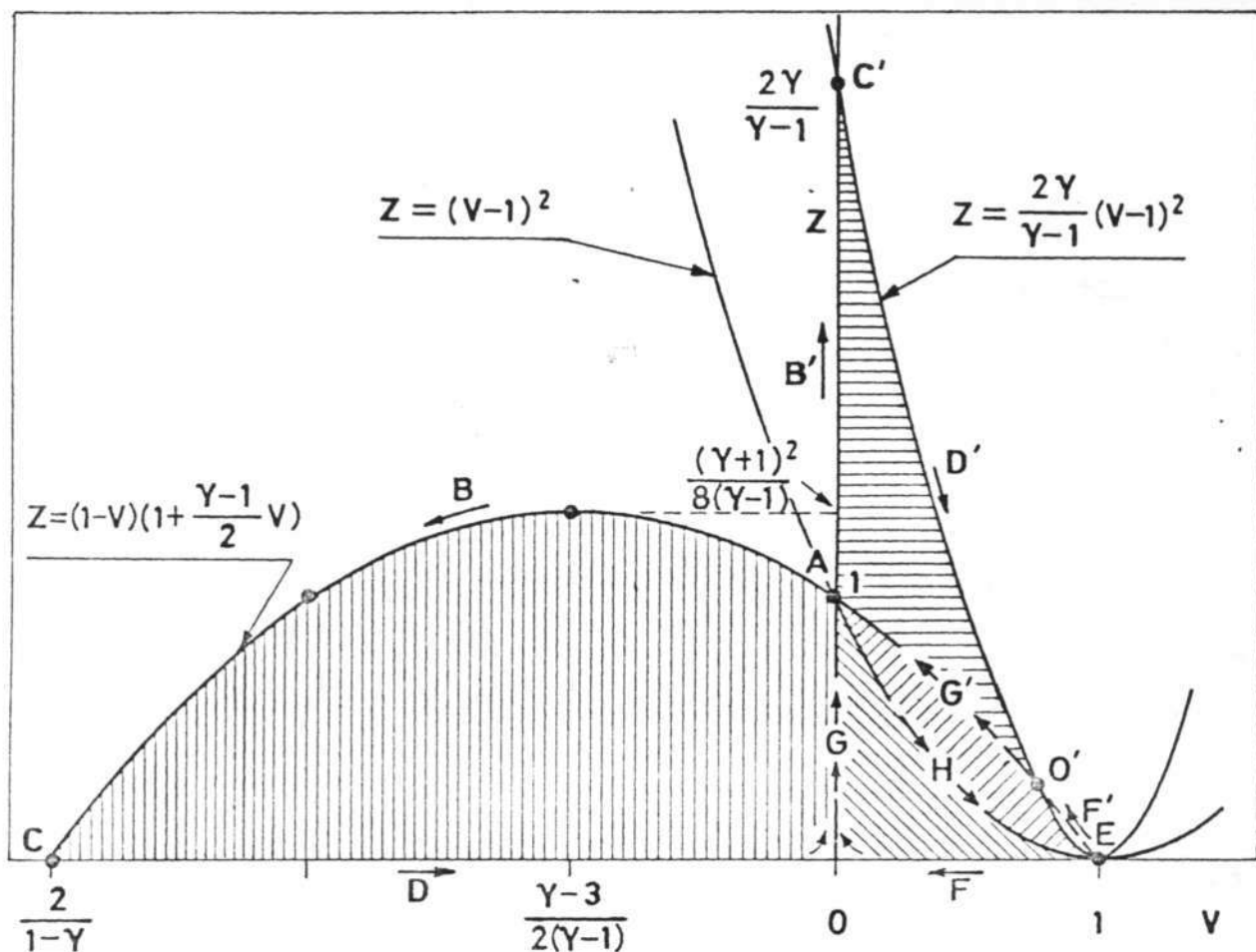


Fig. III.1.- Zonas que se corresponden con los estados de un fluido antes y después del paso de una onda de choque. La zona ABCBOGA se corresponde con  $AB'C'D'O'G'A$  y la zona AHEFOGA se corresponde con  $AHEF'O'G'A$ .

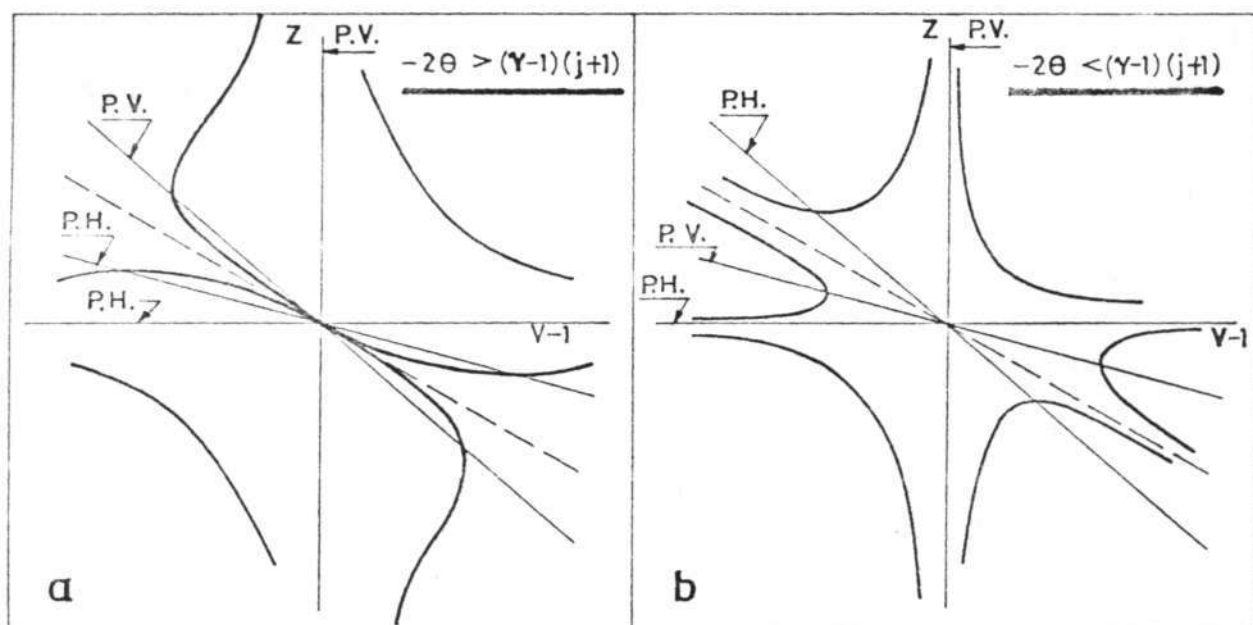


Fig. III.2.- Esquema de las soluciones en torno al punto singular  $V=1$ ,  $Z=0$ . P.H.=pendiente horizontal. P.V.=pendiente vertical. La característica coincide con  $Z=0$ .

$$Z_2 = \{2\gamma/(\gamma-1)\}(V_2-1)^2$$

en el caso más general en que  $Z_1 > 0$ , el estado del fluido después del paso de la onda de choque, está representado por un punto  $(Z, V)$  de la región:

$$Z_2 \leq \{2\gamma/(\gamma-1)\}(V_2-1)^2$$

El fluido quedaría en reposo después del paso de la onda de choque ( $V = 0$ ), si el estado del fluido antes del paso de la onda estuviese representado por un punto de la parábola:

$$Z_1 = (1-V_1)\{1+(\gamma-1)V_1/2\}$$

En la Fig. III.1 se dan las zonas que se corresponden con los estados del fluido antes y después del paso de una onda de choque. En particular, la zona rayada verticalmente se corresponde con la rayada horizontalmente, mientras que las rayadas oblicuamente se corresponden entre sí. Cada letra se corresponde con su homóloga (B con B', C con C', etc.), siendo dobles los puntos de la característica (A, H, E). Las flechas indican el sentido en que se recorre un contorno y su homólogo.

#### III.4. PUNTOS SINGULARES DE LAS ECUACIONES

Las ecuaciones que determinan la solución de semejanza, escritas en la forma (III.9-11) son más apropiadas en cuanto a la integración numérica; sin embargo, para la discusión previa de los puntos críticos, es más conveniente escribirlas en la forma:

$$\frac{dZ}{d\{\ln\lambda\}} = \frac{N_1(V, Z, \theta, \gamma)}{(V-1)^2 - Z}; \quad \frac{dV}{d\{\ln\lambda\}} = \frac{D_1(V, Z, \theta, \gamma)}{(V-1)^2 - Z}; \quad \frac{d\{\ln R\}}{d\{\ln\lambda\}} = \frac{N_2(V, Z, \theta, \gamma)}{(V-1)^2 - Z}$$

(III.19)

donde  $N_1(V, Z, \theta, \gamma)$  y  $N_2(V, Z, \theta, \gamma)$  son los numeradores de (III.9) y (III.10) respectivamente, divididos por  $(V-1)$ . Mientras que  $D(V, Z, \theta, \gamma)$  es el denominador de (III.11).

En el sistema autónomo de ecuaciones (III.19) aparece como variable independiente  $\lambda$ , que representa la posición en las variables de semejanza (ec. (III.7)). El valor de  $\lambda$ , para radio dado, es siempre creciente mientras  $t < 0$  y decreciente cuando  $t > 0$ . El instante  $t = 0$  se alcanza cuando  $\lambda = 0$  y el estado del fluido en  $r = 0$  ( $t > 0$ ) cuando  $\lambda = 0$ . En ambos casos  $|\ln(\lambda)|$ . Los puntos del plano de las fases que representan el estado del fluido en  $t = 0$  ( $r = 0$ ) y  $r = 0$  ( $t > 0$ ), han de ser puntos tales que se anule  $N_1$  y  $D_1$ , sin que lo haga el denominador de (III.19) (Friedrichs, K.O.; 1965). Estos puntos donde se anulan  $N_1$  y  $D_1$  son puntos singulares de la ecuación (III.9).

Los puntos de la curva característica  $Z = (1-V)$  donde no se anulen los numeradores de (III.19) corresponden a puntos donde  $\ln(\lambda)$  tiene un máximo o un mínimo. Es decir, para un  $\lambda$  dado habría soluciones múltiples de  $Z$ ,  $V$  y  $R$ . Por lo tanto, si la solución buscada atraviesa la característica, ha de hacerlo por los puntos donde se anulen también los numeradores de (III.19). Estos puntos son puntos singulares del sistema de ecuaciones diferenciales (III.19), que son:

$$\theta = j\gamma V^*(V^*-1)/\{(\gamma-2)V^*+2\} \quad (\text{III.20a})$$

$$Z^* = (1-V^*)^2 \quad (\text{III.20b})$$

$$V=1 ; \quad Z=0 \quad (\text{III.21})$$

Hay tres puntos singulares de (III.19), puesto que (III.20) da dos valores de  $(V^*, Z^*)$  para cada valor de  $\theta$ ,  $j$  y  $\gamma$ .



Evidentemente, los puntos singulares (III.20-21) de (III.19) lo son también de (III.9), puesto que anulan a  $N_1$  y  $D_1$ . Otros puntos singulares de (III.9) son:

$$V_3 = \frac{2(1-\theta)}{j(\gamma-1)+\gamma+1} ; \quad Z_3 = \frac{\gamma V_3(V_3-1)(V_3-1+\theta)}{\gamma(j+1)V_3+2\theta} \quad (\text{III.22})$$

$$V=0 ; \quad Z=0 \quad (\text{III.23a})$$

$$V=1-\theta ; \quad Z=0 \quad (\text{III.23b})$$

$$V=V_c = -2\theta/\gamma(j+1) ; \quad Z \rightarrow \infty \quad (\text{III.23c})$$

$$V \rightarrow \infty ; \quad Z \rightarrow \infty \quad (\text{III.23d})$$

$$V=1 ; \quad Z \rightarrow \infty \quad (\text{III.23e})$$

El punto  $(V=1, Z=0)$  no anula a  $D_1$ , pero es punto singular de (III.9) porque  $N_1$  contiene a  $(V-1)$  como divisor. Al no anularse  $D_1$ , el valor de  $\ln(X)$  en este punto es distinto de infinito, y por lo tanto no puede representar al estado del fluido en  $t=0$  ( $r > 0$ ) ni en  $r=0$  ( $t > 0$ ).

El punto singular del origen  $(V=0, Z=0)$  es un nodo. Las pendientes en este punto son:

$$\left(\frac{dZ}{dV}\right)_{0,0} = \frac{\gamma(\theta-1)}{2\theta} \quad \left(\frac{dZ}{dV}\right)_{0,0} = 0 \quad (\text{III.24})$$

es decir, este punto singular puede alcanzarse siguiendo una trayectoria excepcional de pendiente  $\gamma(\theta-1)/2\theta$  ; o bien, siguiendo infinitas trayectorias de pendiente nula. En el primer caso la solución quedaría determinada por su pendiente en el origen, independientemente de las condiciones iniciales y de contorno de que se disponga. Por lo tanto, el origen ha de alcanzarse con pendiente nula. La solución en su entorno es de la forma:

$$V^2/Z = M_\infty^2 + \dots \quad (\text{III.25a})$$

$$\ln(R/R_\infty) = 0 + \dots \quad (\text{III.25b})$$

$$\ln(\lambda/\lambda_\infty) = (\ln|V|)/(\theta-1) + \dots \quad (\text{III.25c})$$

donde  $H$ ,  $R$  y  $\lambda$  son constantes de integración que se obtienen mediante el acoplamiento de (III.25) con la solución obtenida para  $V \sim 0(1)$ . Estas constantes están relacionadas entre sí mediante la ecuación (III.12),

$$\lambda_\infty^{2(1-\theta)} = K M_\infty^2 R_\infty \{\gamma - 1 + 2\theta/(j+1)\} \quad (\text{III.26})$$

Dado que  $\theta < 0$  ( $\alpha < 1$ ), la solución (III.25c) nos dice que  $\lambda$  en  $(V=0, Z=0)$ . Por lo tanto esta solución representa el estado del fluido en  $t=0$ .

Si se observa la Fig. III.1, puede verse que el punto representativo del estado del fluido justo antes de ser alcanzado por la onda de choque explosiva, ha de ser un punto situado por debajo de la característica  $(Z < (1-V)^2)$ . El punto representativo del estado del fluido al iniciarse el proceso, es un punto situado en  $Z > (1-V)^2$  cuando se realiza la compresión mediante onda de choque implosiva, por razones de la existencia de la citada onda de choque (Fig. III.1). Por el contrario, el punto inicial está situado en la propia característica en el caso de buscarse la compresión isentrópica del fluido.

Según lo expuesto, se inicia la solución en un punto situado en  $Z_s > (1-V_s)^2$  con  $\lambda = \lambda_s$ , al crecer  $\lambda$  la solución se acerca hacia  $(V=0, Z=0)$  cruzando la característica por uno de los puntos singulares de (III.19), en el caso de no arrancar de uno de ellos. Al pasar por  $(V=0, Z=0)$  hacia  $V < 0$ ,  $\lambda$  empieza a decrecer desde el infinito hasta un valor  $\lambda_c$  correspondiente al estado del fluido delante de la onda explosiva. La onda explosiva

coloca al fluido en un estado representado por un punto  $(V, Z)$  del plano de las fases situado en  $Z > (1-V)^2$  y  $V < 1$ , correspondiente al mismo  $\lambda$ . A partir de este punto la solución ha de progresar en el sentido de las  $\lambda$  decrecientes, separándose de la característica, hasta alcanzar el punto singular de (III.9) donde  $\lambda = 0$ .

Se plantean ahora dos cuestiones. La primera de ellas es saber por cuál de los puntos singulares de (III.19) la solución de (III.9) atraviesa a la característica. La segunda consiste en saber qué punto singular de (III.9), donde se anulan  $N_1$  y  $D_1$ , representa el estado del fluido en  $r=0$  ( $t>0$ ).

En cuanto a la primera cuestión, en el caso de buscar la solución correspondiente a la compresión isentrópica del material, las condiciones que determinan el punto de arranque de la solución, determinan precisamente el punto de corte de la solución de (III.9) con la característica, ya que ambos coinciden. En el caso de buscar la solución de semejanza correspondiente a la compresión mediante onda de choque implosiva, dicha solución ha de pasar por uno de los puntos singulares  $(V^*, Z^*)$  puesto que no puede hacerlo por  $(V = 1, Z = 0)$  ya que entonces, según se deduce de la Fig. III.2, se alcanzarían valores negativos de  $Z$ , lo cual no tiene significado físico.

En la Fig. III.3 se muestra en forma esquemática cómo determinar la posición de los puntos singulares  $(V^*, Z^*)$  y  $(V_3, Z_3)$  como función de  $\theta$  para dos valores típicos de  $\gamma$  (ecs. III.20)), así como el carácter de la singularidad en ellos. La posición de la onda de choque implosiva es sólo función de  $\gamma$  (ecs. (III.16-17)), por lo que permanece fija al variar  $\theta$ . En la Fig.

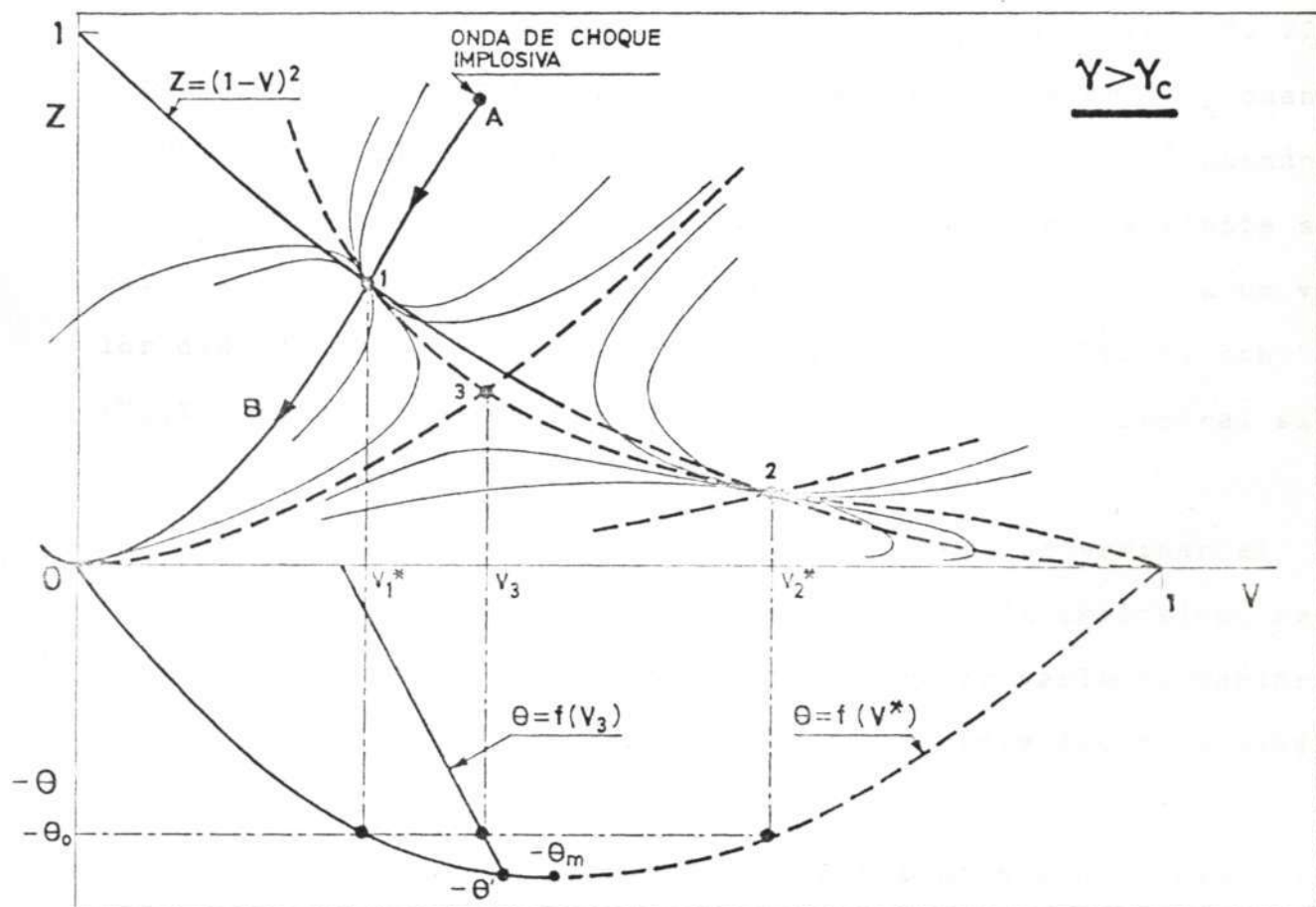
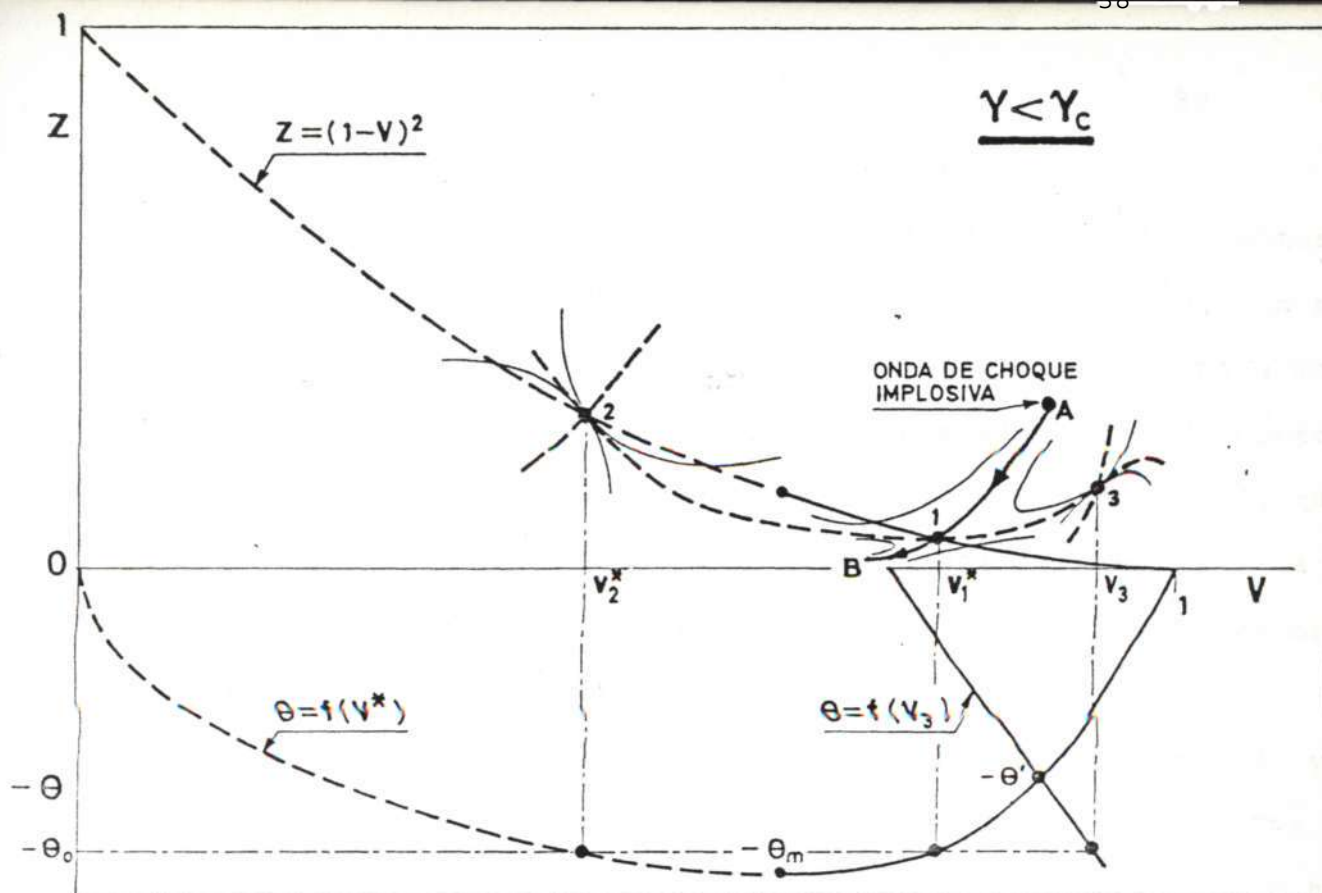


Fig. 11.3. - Posición esquemática de los puntos singulares  $(V^*, Z)$  y  $(V_3, Z_3)$  en función de  $\gamma$  para dos valores típicos de  $\gamma$ .

III.3 puede observarse que a medida que aumenta  $-\theta$ , los puntos singulares  $(V_1^*, Z_1^*)$ , que llamaremos  $(V_1^*, Z_1^*)$  y  $\{V_2^*, Z_2^*\}$ , van moviéndose sobre la característica  $Z=(1-V)$  acercándose uno a otro y coincidiendo cuando  $-\theta$  alcanza su valor máximo  $-\theta_m$ . El punto singular  $(V_3, Z_3)$  cruza la característica solo cuando  $V_3=V^*$ , que ocurre cuando  $\theta = \theta'$ . El valor de  $\theta=\theta_0$  es aquel para el cual la trayectoria A-B pasa por la onda de choque y  $\gamma_c$  es aquel valor de  $\gamma$  para el que  $\theta_0$  coincide con  $\theta_m$ .

Cuando  $-\theta > -\theta'$  el punto singular  $(V_3, Z_3)$  es un nodo y en caso contrario un puerto. El carácter de uno de los puntos singulares  $(V^*, Z^*)$  cambia de puerto a nodo cuando  $(V_3, Z_3)$  lo hace de nodo a puerto en  $\theta = \theta'$ . La recta  $\theta=f(V_3)$ , dada en (III.22), corta a la curva  $\theta=f(V^*)$  (ec. (III.20a)) en el valor  $\theta=\theta_m$  cuando  $\gamma=2.55194$ . El valor de  $V^*$  que coincide con  $V_3$  es  $V_2$  cuando  $\gamma_c < \gamma < 2.55194$  y  $V_1^*$  para los demás valores de  $\gamma$  (mas adelante se calcula el valor de  $\gamma$  que resulta ser menor que 2). Para un valor dado de  $\gamma$ , el punto singular  $(V^*, Z^*)$  que no coincide con  $(V_3, Z_3)$  es un nodo siempre, pero puede ser un punto espiral si  $\gamma > \gamma_c$  con valores de  $\theta$  pequeños.

A la vista de la Fig. III.3 se puede determinar el punto singular por donde ha de pasar la solución implosiva, teniendo en cuenta que la posición de la onda no varía al variar  $\theta$  y que se buscan soluciones continuas con derivadas continuas, a excepción de las ondas de choque.

En el caso  $-\gamma > -\gamma_c$ , si  $-\theta > -\theta_0$  los puntos singulares 1 y 2 se acercan entre sí y una trayectoria que partiese de la onda de choque acabaría en el punto singular 3 donde  $\lambda$  y ya sería imposible salir de él con una solución que tenga significado fí-

sico; si  $-\theta_0 > -\theta > -\theta'$  los puntos singulares 1 y 2 se separan y la trayectoria que parte de la onda de choque cortaría a la característica antes de llegar a 2, obteniéndose soluciones múltiples.

En el caso  $\gamma > \gamma_c$ , si  $-\theta < -\theta_0$  los puntos 1 y 2 se separan y la trayectoria que parte de la onda de choque corta a la característica antes de llegar a 1 y se obtendrían de nuevo soluciones múltiples. Si  $-\theta_0 < -\theta < -\theta'$  los puntos singulares 1 y 2 se acercan, la trayectoria que parte de la onda de choque entra en 1 y si allí no hay discontinuidades en las derivadas de las magnitudes fluidas, la trayectoria vuelve a cortar a la característica fuera de 1, volviendo a obtenerse soluciones múltiples. Puede observarse fácilmente que en el caso  $\gamma < \gamma_c$  y  $-\theta < -\theta'$  todo ocurre en forma similar al caso  $\gamma > \gamma_c$  y  $-\theta < -\theta'$ ; mientras que para  $\gamma > \gamma_c$  y  $-\theta > -\theta'$  todo ocurre como en  $\gamma > \gamma_c$  con  $-\theta > -\theta'$ . Estos dos últimos casos no están representados en la Fig. III.3.

De lo expuesto hasta aquí resulta que la solución buscada, con derivadas continuas y que arranca de la onda de choque, solo es posible si atraviesa el punto  $(V_1^*, Z_1^*)$  por la dirección excepcional A-B. Esto proporciona una condición para determinar el valor de  $\theta = \theta_0(\gamma)$ .

Si se buscan soluciones de semejanza débiles (las cuales pueden presentar discontinuidades en las derivadas de las magnitudes fluidas en superficies características), es claro que para  $\gamma > \gamma_c$  existirán estas soluciones para cualquier valor de  $\theta$  comprendido entre  $\theta_0$  y  $\theta_0$  si  $\gamma < 2.55194$  y entre  $\theta_0$  y  $\theta'$  si  $\gamma > 2.55194$ . Fijados  $\theta$  y  $\gamma$  hay infinitas soluciones débiles que tienen en común, en el plano de las fases  $(V, Z)$ , el tramo desde la onda de choque al punto 1 y difieren en la forma en que se alcan-

za el origen desde este punto singular. De las infinitas formas de salir de 1, las trayectorias (1BOB') y (13COC') de la Fig. III.4 representan los casos límites. En esta Fig. III.4 se han representado las trayectorias límites, calculadas numéricamente en el caso  $\gamma=3$ ,  $j=2$  y  $\theta=-0.59$ . Es interesante anticipar que con las trayectorias que pasan por las proximidades del punto singular  $(V_3, Z_3)$  se alcanzan densidades muy altas.

En cuanto a la segunda cuestión, los posibles puntos que pueden representar el estado del fluido en  $r=0$  ( $t>0$ ) son:  $(V=1-\theta, Z=0)$ ,  $(V, Z)$  y  $(V=V_c, Z)$ . Podemos descartar el punto  $(V=1, Z)$  por no anularse  $D_1$ , lo cual implicaría  $X$  finito no nulo en este punto, y también el punto  $(V, Z)$  porque, desde el punto correspondiente a la onda reflejada, sólo se alcanzaría cuando  $X$ . La solución de (III.9) correspondiente al estado del fluido detrás de la onda de choque explosiva, no puede alcanzar los puntos singulares  $(V=1-\theta, Z=0)$  y  $(V, Z)$ , ambos situados en  $V>1$ , porque antes se atravesaría la característica por algún punto  $(V, Z)$  donde  $N_1$  y  $D_1$  son distintos de cero, lo que implicaría soluciones múltiples en  $V$ ,  $Z$  y  $R$ . Por lo tanto, el punto representativo del estado del fluido en  $r=0$  ( $t>0$ ) ha de ser el punto singular  $(V=V_c, Z)$ . La solución de (III.9) en el entorno de este punto es:

$$\left| (1/Z) - m(V - V_c) \right|^q (1/Z) = B \quad (\text{III.27})$$

$$V_c = -2\theta/\gamma(j+1) \quad (\text{III.28})$$

$$m = (2V_c - j - 3) / \{V_c(V_c - 1)^2(V_c - 1 + \theta)\} \quad (\text{III.29})$$

$$q = \{1 - \theta(j-1)/\gamma(j+1)\} / (j+1) \quad (\text{III.30})$$

Este punto singular es un puerto, y la única forma de llegar a

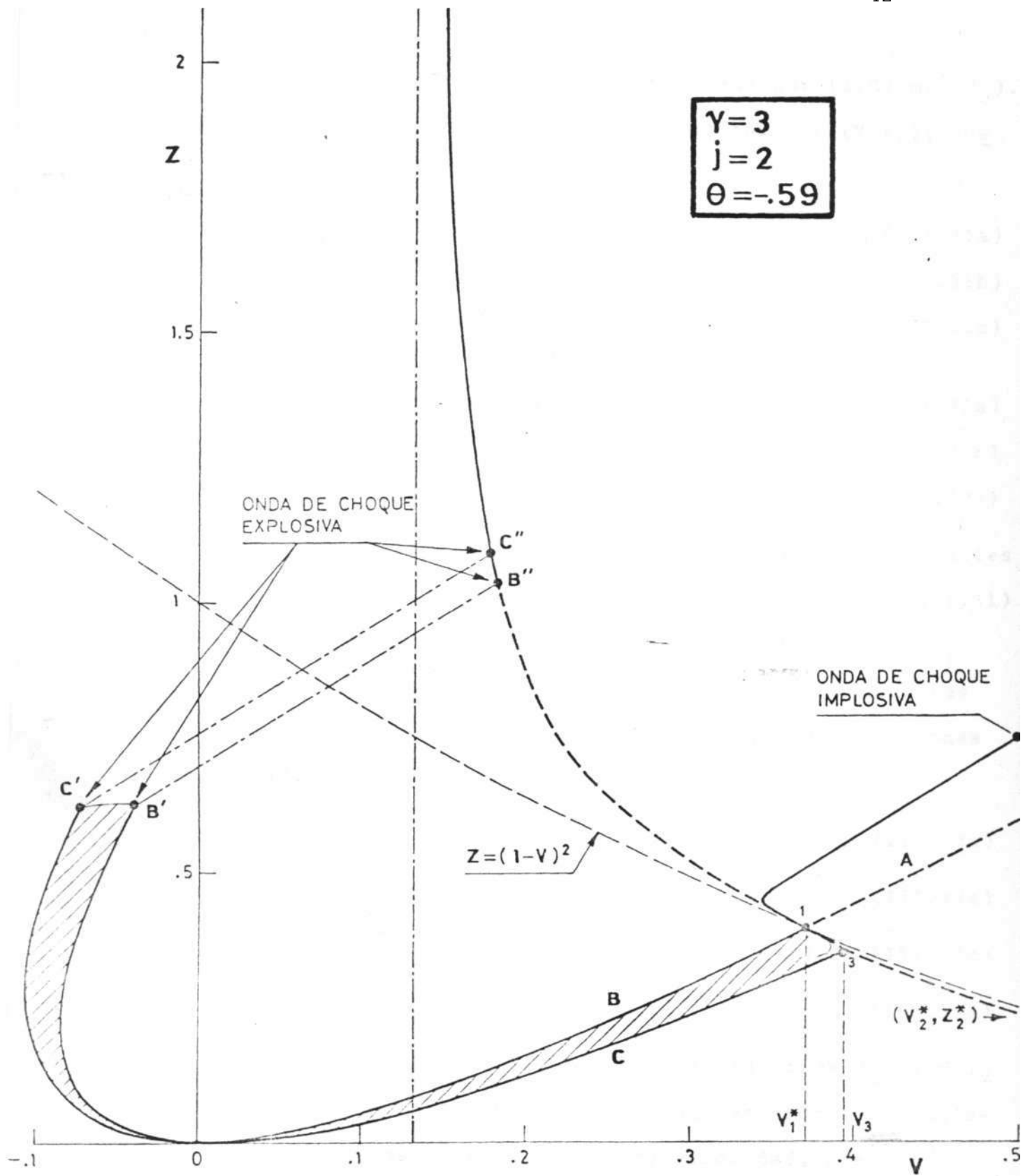


fig. III.4 - Soluciones de semejanza débiles correspondientes a  $\gamma=3$  y  $\theta=-0.59$  ( $j=2$ ). La parte común de la solución es la comprendida entre la onda de choque y el punto 1. Las curvas límites del resto de la solución son la (1BCE') y la (13COC').



él es siguiendo la dirección excepcional dada por  $(1/Z)=m(V-V_c)$ . Esta solución excepcional para valores pequeños de  $(V-V_c)$ , puede escribirse:

$$(1/Z) = m(V-V_c) \quad (\text{III.31a})$$

$$R = K_R (V-V_c)^\beta \quad (\text{III.31b})$$

$$\lambda = K_\lambda (V-V_c)^\delta \quad (\text{III.31c})$$

$$\beta = (j+1)V_c / \{(j-1)V_c + 2\} \quad (\text{III.32a})$$

$$\delta = (1-V_c) / \{(j-1)V_c + 2\} \quad (\text{III.32b})$$

$$1 = \beta - 2\delta \quad (\text{III.32c})$$

$V_c$  está dado en (III.28) y  $m$  en (III.29).  $K_R$  y  $K_\lambda$  son constantes de integración a determinar mediante el acoplamiento de (III.31)

con la solución numérica obtenida para  $(V-V_c) \sim 0(1)$ .

Las expresiones asintóticas (III.31-32), reescritas en variables físicas, describen la forma de las distribuciones de velocidad, presión y densidad para  $t \rightarrow 0$  o para  $r \rightarrow 0$ .

$$\{r/r_s\} = K_\lambda (V-V_c)^\delta (t/t_s)^\alpha \quad (\text{III.33a})$$

$$\{u/(r_s/t_s)\} = \alpha V_c (r/r_s) (t_s/t) \quad (\text{III.33b})$$

$$\{p/\rho_o (r_s/t_s)^2\} = \{\alpha^2 K_R K_\lambda^2 (t_s/t)^{1-\alpha}\} / (\gamma m) \quad (\text{III.33c})$$

$$\{\rho/\rho_o\} = K_R \{(1/K_\lambda) (r/r_s) (t_s/t)^\alpha\}^{\beta/\delta} \quad (\text{III.33d})$$

Las expresiones (III.25), que dan la forma de la solución en torno al punto singular ( $V=0, Z=0$ ), reescritas en variables físicas, dan las distribuciones de velocidad, presión y densidad para grandes  $r$ , o para  $t \rightarrow 0$ , de acuerdo con la solución de semejanza

$$r/r_s = \lambda_\infty \{t/V t_s\}^\alpha \quad (\text{III.34a})$$

$$\{u/(r_s/t_s)\} = -\alpha \lambda_\infty^{1/\alpha} (r/r_s)^{(\alpha-1)/\alpha} \quad (\text{III.34b})$$

$$\{p/\rho_o (r_s/t_s)^2\} = \{\alpha^2 R_\infty \lambda_\infty^{2/\alpha} (r/r_s)^{2(\alpha-1)/\alpha}\} / (\gamma M_\infty^2) \quad (\text{III.34c})$$

$$\{\rho/\rho_o\} = R_\infty \quad (\text{III.34d})$$

En las ecuaciones (III.33) y (III.34)  $r_s$  y  $t_s$  están relacionados mediante la expresión:  $r = |Ct_s|$

### III.5. COMPRESIÓN MEDIANTE ONDA DE CHOQUE IMPLOSIVA

Consideremos una onda de choque plana, cilíndrica o esférica de radio  $R.(t)$ , que se propaga hacia el plano, eje o centro de simetría, a través de un gas en reposo de densidad uniforme y presión nula. Esta onda de choque puede haberse generado por una irradiación láser intensa o por la presión de los productos de la detonación de una cascara interior de material detonante, que ha comunicado energía al gas. Cuando el radio de la onda de choque se hace pequeño frente al radio inicial de la superficie exterior, el campo fluido en la región central no está influenciado por el campo fluido a gran distancia de la onda, comparado con su propio radio. En estas condiciones, el movimiento en esa región toma asintoticamente un carácter autosemejante olvidando los detalles de las condiciones iniciales y de contorno, que recuerda solamente a través de la constante  $C$  (ec. (III.7)). La constante  $C$  sólo podría determinarse mediante el acoplamiento con la solución numérica para tiempos anteriores. Tanto  $C$  como el exponente  $a$  de (III.7) no pueden determinarse directamente por análisis dimensional ni mediante el uso de leyes integrales de conservación, por lo que la solución asintótica de semejanza que se obtenga será de segunda clase (Barenblatt,

6.1. y Zel'dovich. Ya.B.; 1972).

La onda de choque implosiva, al moverse en un medio de densidad uniforme y presión nula, es una onda de choque intensa, representada en el plano de las fases  $(V, Z)$  por el punto dado por (III.15-17), correspondiente a  $\lambda = \lambda_s = 1$ . La solución de (III.9) que parte de  $X = 1$ , cruza la característica en el punto singular  $(V_1^*, Z_1^*)$  por la dirección excepcional A-B (Fig.III.3). Cuando  $X$  esta solución alcanza el punto singular del origen  $(V=0, Z=0)$ , que representa el instante en que la onda de choque implosiva llega al centro de simetría (ecs. (III.25) y (III.34)). La solución ha de continuarse hacia  $V < 0$ , hasta un punto  $(V_1, Z_1)$  que representa el estado del fluido delante de la onda de choque explosiva donde  $\lambda = \lambda_r$ . Mediante (III.13-14), el punto  $(V_1, Z_1)$  se transforma en un punto  $(V_2, Z_2)$ , correspondiente al mismo  $\lambda_r$ , a partir del cual la solución continúa hasta el punto del infinito  $(V=V_\infty, Z_\infty)$  donde  $\lambda=0$ , representativo del estado del fluido en el centro de simetría (ees. (III.31) y (III.33)).

#### III.5.1.1. Obtención del exponente $\alpha$ y $\gamma_c$

El exponente  $\alpha$ , o su equivalente  $\theta$ , se obtiene de la condición de que la solución de (III.9), que parte de la onda de choque, ha de cruzar la característica en el punto singular  $(V_1^*; Z_1^*)$  por la dirección excepcional A-B (Fig. III.3), para asegurar que cuando  $t < 0$  las distribuciones de velocidad, presión y densidad son continuas y con derivadas continuas. Sólo es posible conseguir esto para un valor  $\theta_0(\gamma)$  de  $\theta$  para cada  $\gamma$ . En este apartado nos limitaremos a describir el procedimiento numérico para calcular  $\theta_0(\gamma)$  y  $\gamma_c$ .

Las coordenadas  $(V_1^*, Z_1^*)$  vienen dadas, según (III.20), en función de  $\theta$ ,  $j$  y  $\gamma$  por:

$$V_1^* = \{1 + \theta_0(\gamma - 2)/j\gamma\}/2 + (\gamma - \gamma_c) \{ \sqrt{(1 + \theta_0(\gamma - 2)/j\gamma)^2/4 + 2\theta_0/j\gamma} \} / |\gamma - \gamma_c| \quad (\text{III.35a})$$

$$Z_1^* = (1 - V_1^*)^2 \quad (\text{III.35b})$$

donde  $\gamma_c$  es el valor de  $\gamma$  para el cual los dos puntos singulares  $(V^*, Z^*)$  coinciden. Cuando esto ocurre, de (III.20) se obtiene:

$$\theta_0 = -j\gamma_c / (\sqrt{\gamma_c} + \sqrt{2})^2 \quad (\text{III.36a})$$

$$V_1^* = V_2^* = \sqrt{2} / (\sqrt{\gamma_c} + \sqrt{2}) \quad (\text{III.36b})$$

$$Z_1^* = Z_2^* = (1 - V_1^*)^2 \quad (\text{III.36c})$$

La dirección excepcional A-B de (III.9) (Fig. III.3), está dado por

$$(dZ/dV)_1^* = \{b - h - \sqrt{(b - h)^2 + 4ae}\} / 2e \quad (\text{III.37a})$$

mientras que la pendiente de (III.10) correspondiente a la A-B de (III.9) es

$$\{d(\ln R)/dV\}_1^* = \{a_1 - (2\theta_0/\gamma)(dZ/dV)_1^*\} / \{h + e(dZ/dV)_1^*\} \quad (\text{III.37b})$$

donde los valores de los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $e$ ,  $h$  y  $a_1$  están dados en el apéndice A.

El valor de  $\theta_0$  para un  $j$  y  $\gamma$  dados puede obtenerse empezando por un valor arbitrario inicial de  $\theta_0 = \theta_{0i}$ , de forma tal que  $-\theta_{0i}$  sea menor que su valor máximo  $-\theta_m$  (Fig. III,3). Conociendo, de (III.35) y (III.37a) se determina la posición del punto singular  $(V_1^*, Z_1^*)$  y la pendiente de (III.9) con que ha de salirse de este punto. Si el valor de  $\theta_{0i}$  no es el correcto, al llegar con la integración numérica a  $V = V_s$  dado en (III.16), el

valor  $Z(V_s)$  no será el dado por (III.17), por lo que es necesario corregir el valor de  $\theta_{oi}$  mediante un proceso iterativo hasta que  $Z(V_s)$  sea  $Z_s$  dado por (III.17). Si lo que se desea obtener es  $\gamma_c$ , el proceso es idéntico al realizado con  $\theta_o$ , pero utilizando (III.36) en lugar de (III.35).

En el apéndice A se da el valor de  $\alpha_0$  para distintos valores de  $\gamma$  incluyendo  $\gamma_c$ .

### III.5.1.2. Obtención de la solución numérica

Una vez determinado  $\theta_o$  y  $\gamma_c$ , es necesario integrar (III.9) y (III.10) para obtener  $Z(V)$  y  $R(V)$ , que junto con (III.12) determinan  $\lambda(V)$ . Conocidas las variables de semejanza es posible obtener las distribuciones espaciales y temporales de velocidad, presión y densidad, de acuerdo con las definiciones dadas en (III.4-7).

Las condiciones (III.16-18) en la onda de choque implosiva, junto con  $\lambda_s = 1$ , determinan la constante  $K$  de (III.12), válida hasta que la solución de (III.9) encuentra a la onda de choque explosiva,

$$K = K_1 = \{2\gamma/(\gamma+1)\}\{(\gamma-1)/(\gamma+1)\}^\gamma \quad (\text{III.38})$$

Con objeto de realizar la integración numérica de (III.9) y (III.10) con más sencillez en las proximidades del punto singular del origen ( $V=0, Z=0$ ) y a la vista de las soluciones asintóticas en sus proximidades (III.25), utilizaremos la variable  $X=Z/V^2$  en lugar de  $Z$ . En esta variable, al nodo del origen le corresponden todos los puntos de  $X$  finita y  $V$  nula desapareciendo la singularidad. La variable  $X$  es el inverso del cuadra-

do del número de Mach local del fluido.

Para obtener la solución detrás de la onda de choque explosiva, es necesario integrar las ecuaciones (III.9-10) partiendo del punto singular del infinito ( $V = V_c, Z$ ) con el comportamiento asintótico (III.31) y utilizando la variable  $Y = 1/Z$ .

Las ecuaciones (III.9-10) escritas en la variable  $X = Z/V^2$  y en la variable  $Y = 1/Z$  se dan en el apéndice A.

#### III.5.1.3. Salto a través de la onda de choque explosiva

La integración numérica de (III.9-10) ha de comenzar-se en la onda de choque implosiva (condiciones (III.16-17)) y en el punto singular del infinito ( $V = V_c, Z$ ) (ecs. (III.31)). Estas dos partes de la solución están representadas en la Fig. III.5 por las S-O-E y H-F-A respectivamente. Ambas partes de la solución acaban en los puntos E y F de coordenadas  $(V_1, Z_1)$  y  $(V_2, Z_2)$ , que representen los estados del fluido a uno y otro lado de la onda de choque explosiva. Ambos tramos de la solución, junto con la discontinuidad E-F, representan el estado del fluido durante el período implosivo  $t < 0$  (tramo S-A-0) y durante el período explosivo  $t > 0$  (tramo 0-E-F-H); dentro del período explosivo, el tramo 0-E representa la región exterior a la onda de choque reflejada y el tramo F-H la región interior a dicha onda.

La onda de choque reflejada ha de estar situada en  $\lambda = \lambda_r$  (puntos E y F' de la Fig. III.5) tal que las condiciones de salto a través de ella (III.13-14) permitan empalmar la región exterior con la interior. La determinación de  $X_r$  es equivalente a la obtención de  $(V_1, Z_1)$  y  $(V_2, Z_2)$ ; para ello ha de utilizarse la solución numérica 0-E de (III.9), donde E es en principio des-

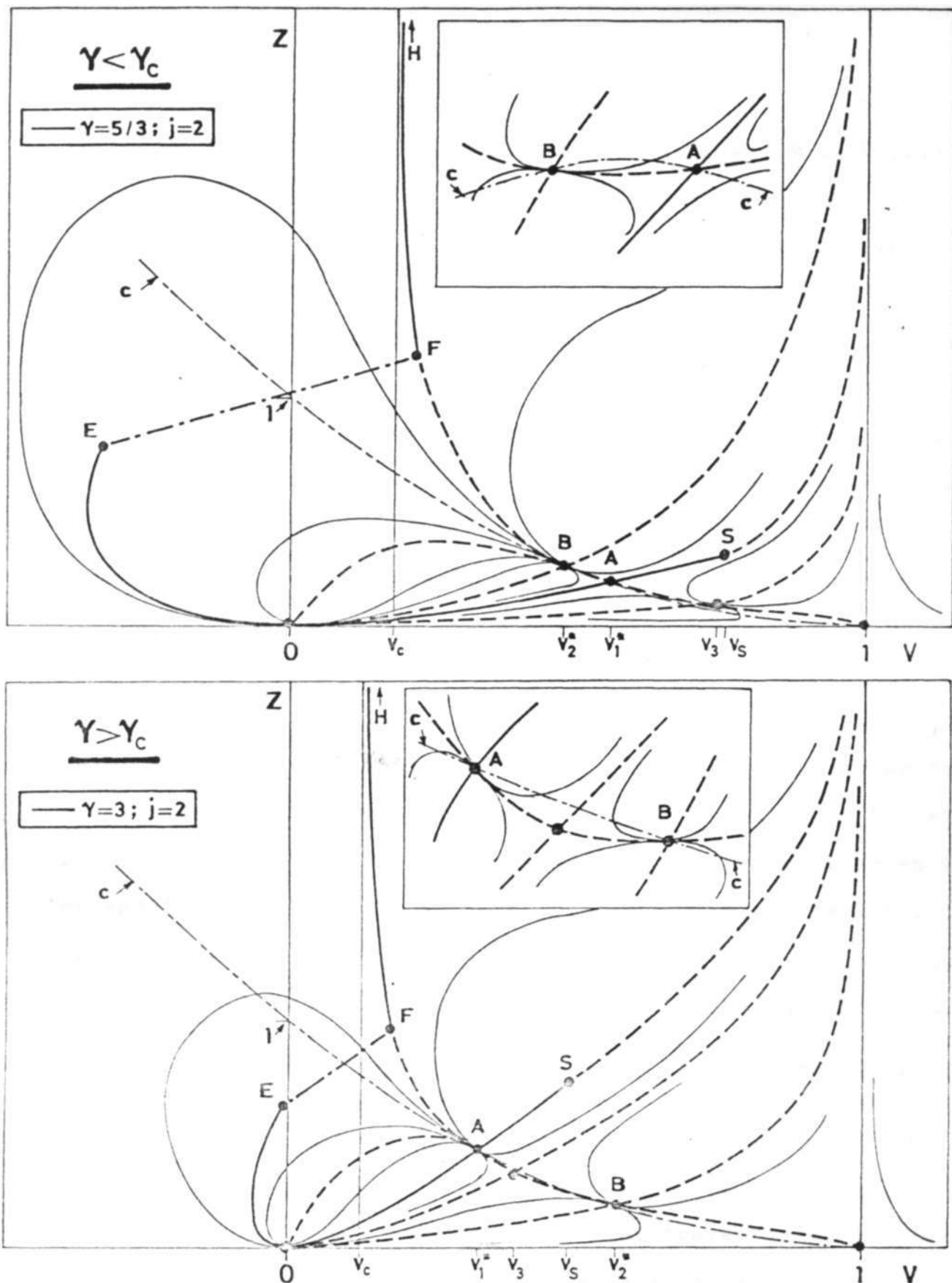


Fig. III.5. Esquema de las curvas integrales en el plano de las fases para dos valores típicos de  $\gamma$ . La línea SAOEFH representa la solución numérica para  $\gamma = 5/3$  y 3 respectivamente ( $j = 2$ ), correspondientes a  $\theta = \theta_0$ . También se han representado esquemáticamente otras soluciones. OS es el salto de  $(V, Z)$  a través de la onda implosiva y EF a través de la onda explosiva. La característica está indicada por una  $c$ .

conocido, junto con (III.13-14) que dan  $V_2(V_1, Z_1)$  y  $Z_2(V_1, Z_1)$ . Cuando  $(V_1, Z_1)$  se mueve sobre 0-E, su imagen  $(V_2, Z_2)$  se mueve a lo largo de una curva que arranca de S (en cuyo caso  $(V_1, Z_1)$  coincide con 0) y corta a la curva H-F-A en F cuando  $(V_1, Z_1)$  coincide con E. De esta forma se determinan los puntos  $E(V_1, Z_1)$  y  $F(V_2, Z_2)$ .

Conocidos  $V_1, Z_1, V_2, Z_2$  se obtiene  $R_1 = R(V_1)$  de la integración de (III.10) y  $\lambda_r = \lambda(V_1)$  de (III.12) con  $K = K_i$  dada en (III.38). De (III.15) y  $V_1, V_2$  y  $R_1$  se obtiene  $R_2$  y con  $\lambda_r, V_2, Z_2$  y  $R_2$ ,

introducidas en (III.12), se obtiene el nuevo valor de la constante  $K = K_e$  válida ahora en la zona interior a la onda explosiva.

Las constantes  $K$  y  $K_e$  (ecs. (III.31b y c)) pueden determinarse una vez conocido el salto a través de la onda explosiva, puesto que la integración de (III.10) iniciada en H ( $V = V_c, Z$ ), nos daría  $\{R(V)/K_R\}$  en lugar de  $R(V)$ ; en particular en F obtendríamos  $\{R(V_2)/K_R\}$ , al conocerse en F el valor de  $R = R_2$ , la constante sería:  $K_R = R_2 / \{R(V_2)/K_R\} \cdot K_\lambda$ , se obtendría sustituyendo la solución asintótica (III.31) en (III.12), dándonos:

$$K_\lambda^{2(1-\theta_0)} = m K_e K_R^{(\gamma-1)} \{(1-V_c)K_R\}^{2\theta_0/(j+1)} \quad (\text{III.39})$$

#### III.5.1.4. Trayectorias

A continuación calcularemos las trayectorias de las partículas fluidas correspondientes a capas fluidas a la misma distancia del centro. Esto es, calcularemos la evolución temporal de los radios de las distintas capas fluidas. Una vez conocidas las trayectorias se puede determinar la evolución temporal



de la velocidad, presión y densidad a que están sometidas dichas capas.

Si se sometiese una esfera (cilindro) de radio inicial  $R_0$  a una ley de presión exterior,  $P_p(t)$ , idéntica a la que, de acuerdo con la solución de semejanza obtenida, está sometida una capa fluida, esta solución de semejanza describiría todo el proceso implosivo y explosivo de la esfera hasta el instante en que la onda de choque reflejada alcanzase la superficie exterior de la bola, pues sería la solución exacta de las ecuaciones de Euler satisfaciendo las condiciones iniciales y de contorno.

Las trayectorias están dadas por la ecuación diferencial

$$dr_p/dt = u\{r_p(t), t\} \quad (\text{III.40})$$

ecuación que puede ponerse en variables de semejanza (III.4-7) en la forma:

$$dt/d\lambda = t(1-\theta_0)/\lambda(V-1) \quad (\text{III.41})$$

$$dr_p/d\lambda = r_p V/\lambda(V-1) \quad (\text{III.42})$$

combinando (III.41-42) se obtiene de nuevo la ecuación (III.7) que relaciona a  $r_p$ ,  $t$  y  $\lambda$ . Sustituyendo el valor de  $\lambda$  dado por (III.12) se obtiene

$$\left(\frac{t/t_s}{V}\right)^2 = \frac{(Z/V^2)(r_p/r_s)^{2(1-\theta_0)}}{KR^{(\gamma-1)}\{R(1-V)\}^{2\theta_0/(j+1)}} \quad (\text{III.43})$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (III.42) y (III.11) se obtiene

$$d\{\ln(r_p/r_s)\}/dV = V\{(V-1)^2 - Z\}/D_1(V-1) \quad (\text{III.44a})$$

donde  $D_1$  es el denominador de (III.11) con  $\theta=\theta_0$

La integración simultánea de (III.9-10) y (III.44a) permite conocer  $Z(V)$ ,  $R(V)$  y  $r_p(V)$ , que sustituidas en (III.43) determinan  $t(V)$ . De esta forma se tienen descritas las trayectorias en forma paramétrica con  $V$  como parámetro.

Las trayectorias detrás de la onda de choque explosiva se obtienen como se ha indicado anteriormente sin más que cambiar la variable  $Y=1/Z$  en (III.44a) y utilizando (III.9-10), con la variable  $Y=1/Z$  (apéndice A), para la integración numérica. Es necesario añadir el comportamiento asintótico de (III.44a) en las proximidades del punto singular del infinito ( $V=V_c$ ,  $Y=0$ ) para poder iniciar la integración en él; este es

$$\ln(r_p/r_s) = \ln K_r - \{V_c / [(j-1)V_c + 2]\} \ln(V-V_c) \quad (\text{III.44b})$$

donde  $K$  es una constante a determinar en la onda de choque reflejada del mismo modo que determinamos  $K_\lambda$ .

La evolución temporal de la velocidad, presión y densidad correspondiente a una capa fluida son (ecs. (III.4-6))

$$u_p/|u_s| = (\gamma+1)(r_p/r_s)\{V/(t/|t_s|)\}/2 \quad (\text{III.45a})$$

$$p_p/p_s = \{(2/\gamma)ZR(u_p/u_s)^2/V^2\}/(\gamma+1) \quad (\text{III.45b})$$

$$\rho_p/\rho_s = \{(\gamma-1)/(\gamma+1)\}R \quad (\text{III.45c})$$

donde  $u_s$ ,  $p_s$  y  $\rho_s$  son los valores de la velocidad, presión y densidad respectivamente, cuando la capa fluida de radio  $r_s$  es alcanzada por la onda de choque implosiva en el instante  $t_s$ . Estos valores son:

$$|u_s/(r_s/t_s)| = 2\alpha_o/(\gamma+1) \quad (\text{III.46a})$$

$$\{p_s/\rho_o(r_s/t_s)^2\} = 2\alpha_o^2/(\gamma+1) \quad (\text{III.46b})$$

$$\rho_s/\rho_o = (\gamma+1)/(\gamma-1) \quad (\text{III.46c})$$

$$r_s = |Ct_s|^{\alpha_0} \quad (\text{III.46d})$$

#### III.5.1.5. Resultados

Una vez que se conoce el valor de  $\delta$  ( $\gamma$ ) se puede determinar la posición de los puntos singulares, que será función exclusiva de  $\gamma$  (al contrario que en la Fig. (III.3) que son función de  $\theta$  y  $\gamma$ ). En particular vamos a ocuparnos de los puntos singulares  $(V^*, Z^*)$  y  $(V_3, Z_3)$ .

Hay tres valores característicos de  $\gamma$  en los cuales cambia el tipo de singularidad de  $(V^*, Z^*)$  y  $(V_3, Z_3)$ . Estos valores de  $\gamma$  son:  $\gamma = \gamma_c$  cuando  $(V_1^*, Z_1^*)$  y  $(V_2, Z_2)$  coinciden;  $\gamma = \gamma_c'$  si  $(V_2^*, Z_2^*)$  coincide con  $(V_3, Z_3)$ ; y  $\gamma = \gamma_c''$  cuando  $(V_2^*, Z_2^*)$  cambia de ser nodo a ser punto espiral. En la tabla II.1 se dan los valores de  $\gamma_c$ . El valor de  $\gamma_c$  se ha obtenido mediante la integración numérica de (III.9) (véase apartado III.5.1.1). Este valor de  $\gamma_c$  fue acotado por (Welsh, R.W.; 1967) entre  $1.865 < \gamma_c < 1.875$  en el caso esférico. Los valores de  $\gamma_c'$  y  $\gamma_c''$  se han obtenido por interpolación de los resultados de las integraciones numéricas. En la Fig. III.7 se dan los valores de  $V_1^*$ ,  $V_2^*$  y  $V_3$  como función de  $\gamma$ , indicando el tipo de singularidad de cada uno de estos puntos singulares.

j	$\gamma_c$	$\gamma_c$	$\gamma_c''$
1	1.90923	2.368...	5.864...
2	1.86977	2.222...	4.413...

Tabla III.1. Valores de la relación de calores específicos  $\gamma$  para los cuales los puntos singulares  $(V^*, Z^*)$  y  $(V_3, Z_3)$  cambian de tipo de singularidad.

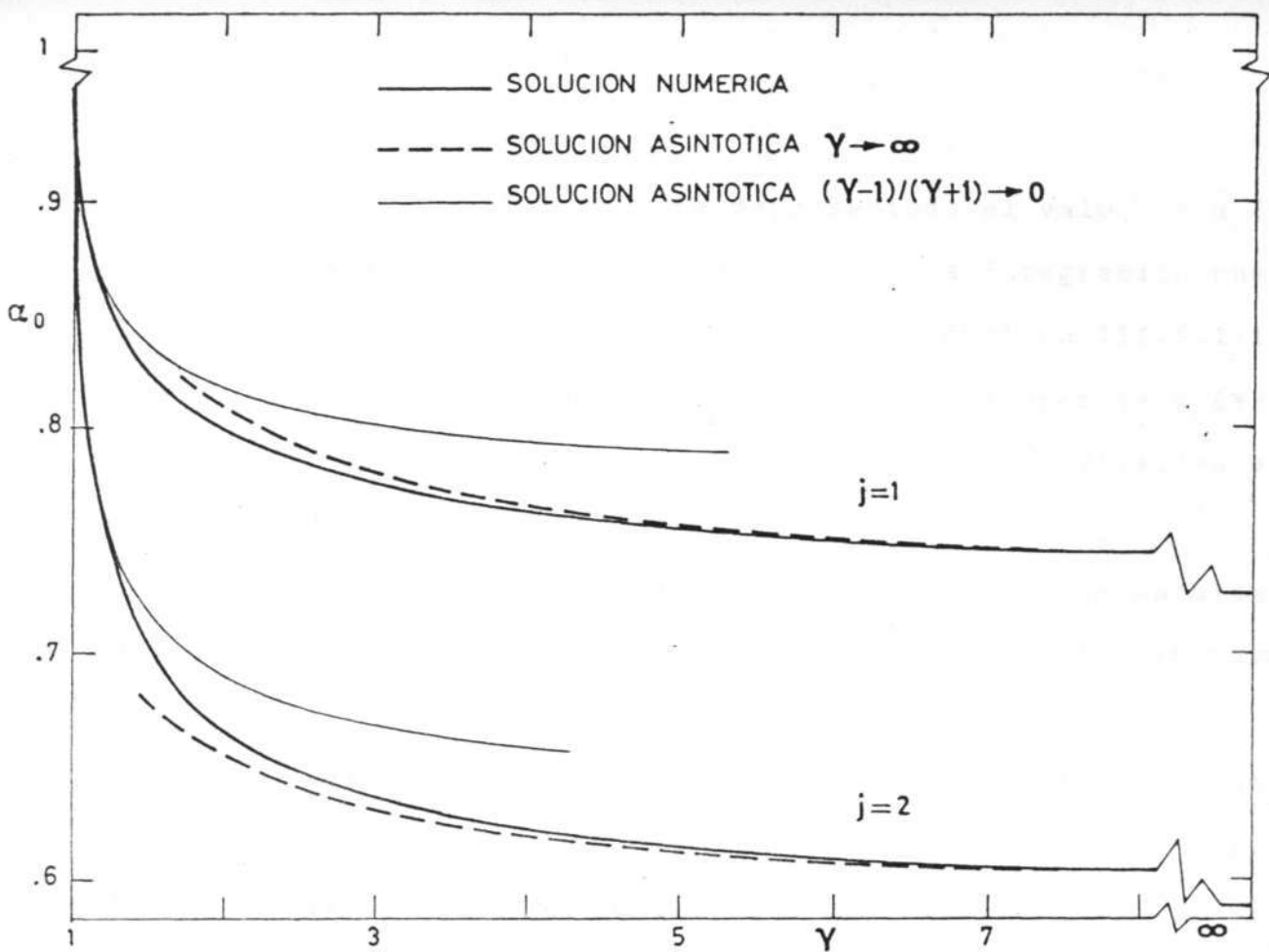


Fig. III.6. Exponente  $a(Y)$  en los casos cilíndrico y esférico.

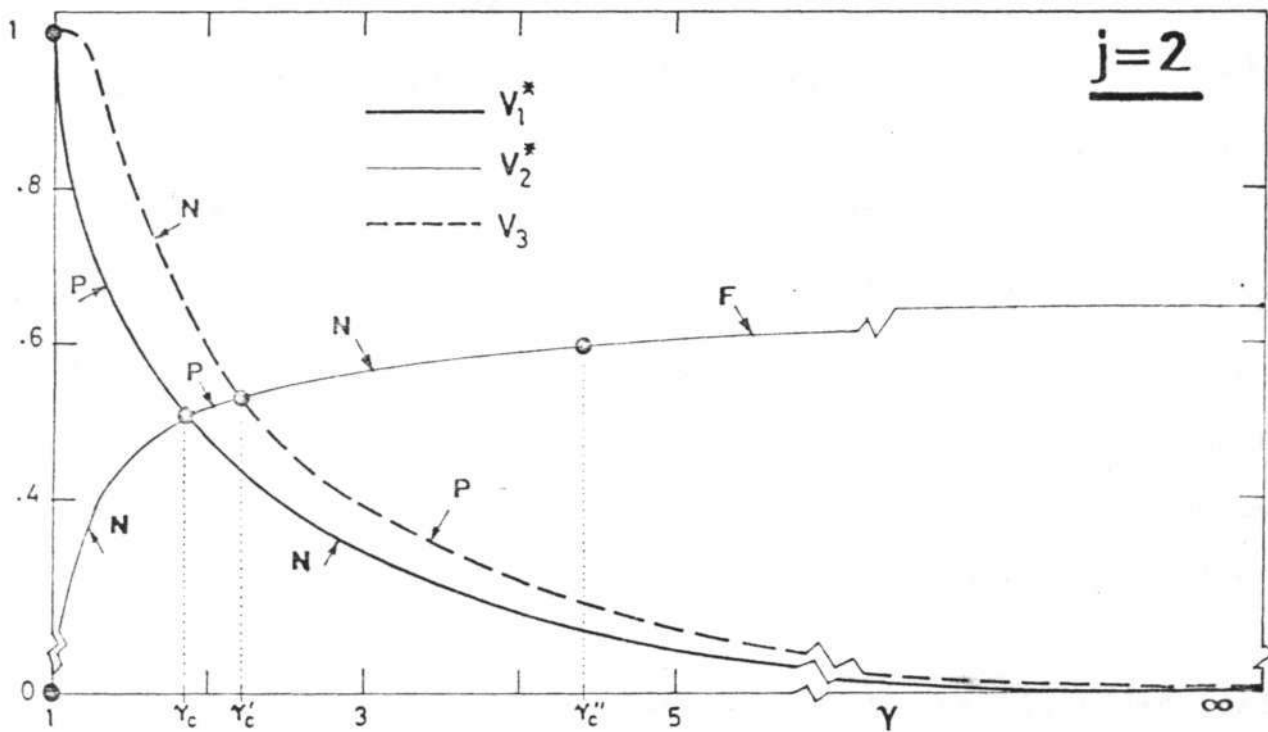


Fig. III.7. Coordenada  $V$  de los puntos singulares  $(V^*, Z^*)$  y  $(V_3, Z_3)$  como función de  $Y$  (caso esférico).  $N$  = nodo ;  $P$  = puerto ;  $F$  = foco o punto espiral. El tipo de singularidad cambia en  $Y_c$ ,  $Y_c'$  y  $Y_c''$

En la Fig. III.6 se ha representado el valor de  $a$  ( $\gamma$ ) correspondiente a  $\theta_0(\gamma)$ , obtenido mediante la integración numérica de (III.9) para distintos  $\gamma$  según se indicó en III.5.1.1. En esta misma figura se han representado los valores de  $a$  ( $\gamma$ ) obtenidos mediante las soluciones asintóticas  $(\gamma-1)/(\gamma+1)$  0 y  $\gamma$  que se dan a continuación.

En la tabla III.2 se dan los valores de las magnitudes más características del proceso implosivo y explosivo para distintos valores de  $\gamma$  en los casos cilíndrico y esférico.

El estado del fluido en el instante  $t=0$  y detrás de la onda de choque reflejada puede obtenerse de las Figs. III.8-11. En ellas se han representado las densidades  $\rho$  y  $\rho_r$ , así como las presiones  $\Pi$  y  $\pi_r$ , como función de  $\gamma$ . La magnitud  $\Pi$  representada en la Fig. III.10 está dada por

$$\pi_{\infty} = \{p(t=0)/p_s\} (r/r_s)^{2(1-\alpha_0)/\alpha_0} = \{(\gamma+1)/2\gamma\} K_1 R_{\infty}^{\{\gamma+2\theta_0/(j+1)\}} \quad (\text{III.47})$$

mientras que  $\pi_r$  de la Fig. III.11, está dada por

$$\pi_r = (p_r/p_s) |t/t_s|^{2(1-\alpha_0)} = (\gamma+1) \lambda_r^2 R_2 Z_2 / 2\gamma \quad (\text{III.48})$$

No se han representado directamente  $p(t=0)$  y  $p_r$  debido a que varían con  $t$  ó con  $r$ , además de  $\gamma$ . En las Figs. III.8-11 también se han representado los correspondientes valores obtenidos de las soluciones asintóticas  $\gamma-1$  y  $\gamma$  que se obtienen seguidamente.

Las distribuciones de velocidad, presión y densidad como función del tiempo para radio fijo, y como función del radio en dos instantes fijos de tiempo, anterior y posterior a la reflexión de la onda de choque en el centro de simetría, están

SIMETRIA CILINDRICA (j=1)						
$\gamma$	$\alpha_o$	$M_\infty$	$\rho_\infty/\rho_s$	$\pi_\infty$	$r_r/r_s$	$t_r/ t_s $
1.	1.	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0.	$\infty$
1.05	.907121	6.5619	5.0749	3.18669	4.70468E-2	29.0662
1.4	.835323	1.6793	2.14918	1.76308	.422403	2.80581
5/3	.815625	1.0931	1.75385	1.6421	.650127	1.69541
1.90923	.803711	.82407	1.56663	1.57522	.812733	1.29433
2.	.800112	.75347	1.51639	1.5749	.864447	1.19968
3.	.775667	.37758	1.25	1.49844	1.23256	.76371
25.	.732986	2.7276E-2	1.01345	1.34984	1.81486	.443471
$\infty$	.727197	0.	1.	1.32156	1.87573	.420994
$\gamma$	$\rho_r/\rho_s$	$\pi_r$	$K_e$	$K_R$	$K_\lambda$	$P(r=0)/P_s$
1.	$\infty$	$\infty$	0.	$\infty$	0.	$\infty$
1.05	1634.49	2392.34	3.46337E-2	1.28048E5	.953877	2385.61
1.4	12.9572	25.5479	.109031	136.76	2.65052	24.3142
5/3	5.74277	12.5201	.135509	37.343	3.61052	11.541
1.90923	3.88506	8.91631	.152726	19.1061	4.34629	7.9687
2.	3.497	8.13362	.158048	15.8538	4.59635	7.20773
3.	1.95185	4.82096	.195413	5.2613	6.79241	3.99005
25.	1.056	2.48287	.265707	1.214	23.3841	1.66434
$\infty$	1.	2.29658	.276178	1.	$\infty$	1.45948

SIMETRIA ESFERICA (j=2)						
$\gamma$	$\alpha_o$	$M_\infty$	$\rho_\infty/\rho_s$	$\pi_\infty$	$r_r/r_s$	$t_r/ t_s $
1.	1.	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0.	$\infty$
1.05	.832247	6.69125	14.2702	6.92309	4.82555E-2	38.1773
1.4	.717174	1.55372	3.31273	2.43735	.491866	2.68953
5/3	.688377	.95639	2.38743	2.15838	.740284	1.54784
1.86977	.674168	.72543	2.02967	2.0357	.879326	1.21016
2.	.667046	.61877	1.88524	1.99679	.951549	1.0773
3.	.636411	.27587	1.3664	1.73957	1.26166	.694045
25.	.593226	1.2279E-2	1.01129	1.26991	1.52254	.49231
$\infty$	.588289	0.	1.	1.19182	1.50989	.496388
$\gamma$	$\rho_r/\rho_s$	$\pi_r$	$K_e$	$K_R$	$K_\lambda$	$P(r=0)/P_s$
1.	$\infty$	$\infty$	0.	$\infty$	0.	$\infty$
1.05	48646.8	63278.	3.19627E-2	6.36027E6	.678827	63009.5
1.4	24.1767	46.6613	.101766	366.92	2.05684	43.2024
5/3	8.06778	16.7823	.129338	69.73	2.77562	14.3081
1.86977	5.18482	11.0054	.144544	34.0321	3.21237	8.95491
2.	4.24097	9.04444	.152576	24.2409	3.45618	7.16945
3.	2.1002	4.33262	.18311	6.52	4.7775	2.92115
25.	1.04243	1.53247	.261274	1.2282	12.9515	.634051
$\infty$	1.	1.33338	.271570	1.	$\infty$	.466037

Tabla III.2. Valores de los parámetros más característicos del proceso implosivo y explosivo para distintos valores de  $\gamma$ . Simetría cilíndrica ( $j=1$ ) y esférica ( $j=2$ ).

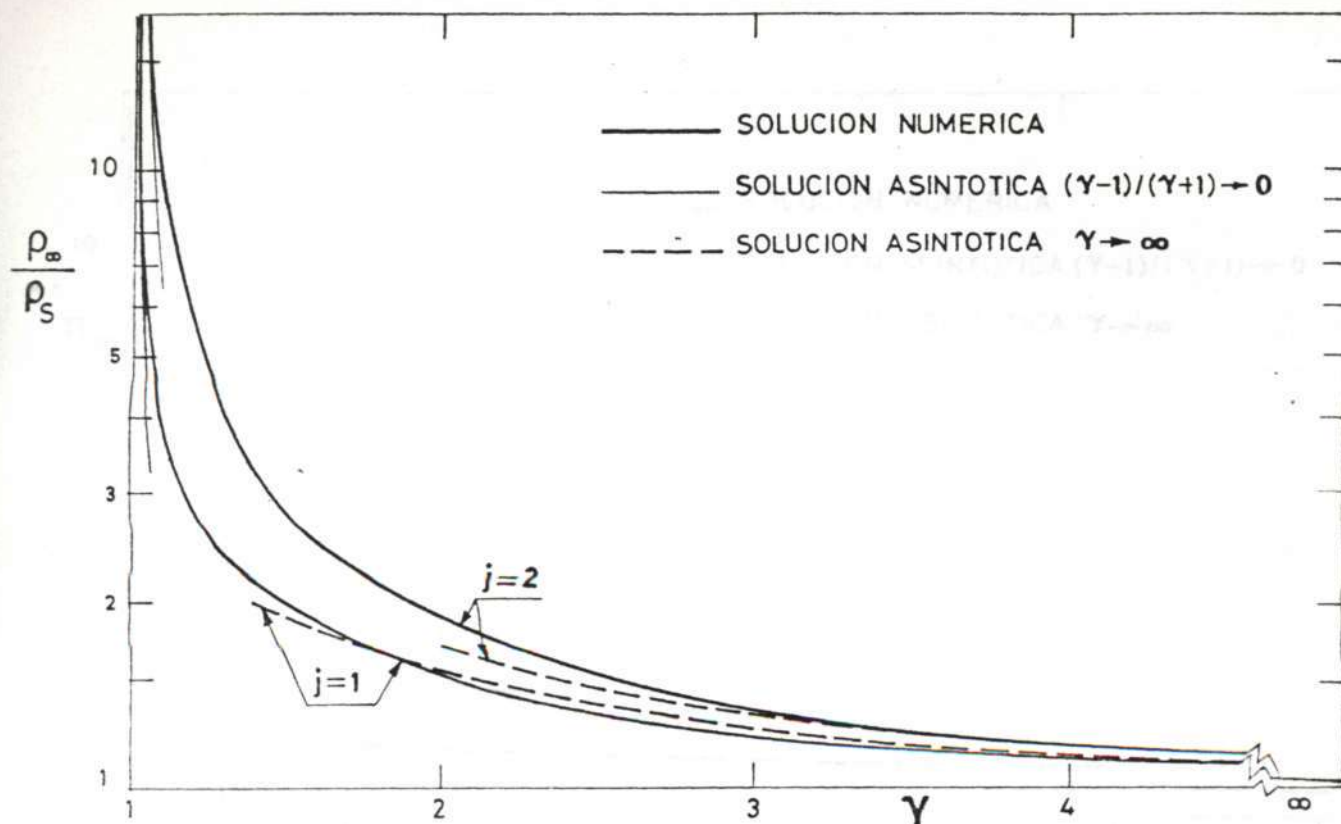


Fig. III.8. Densidad  $\rho(\gamma)$  en los casos cilíndrico y esférico.

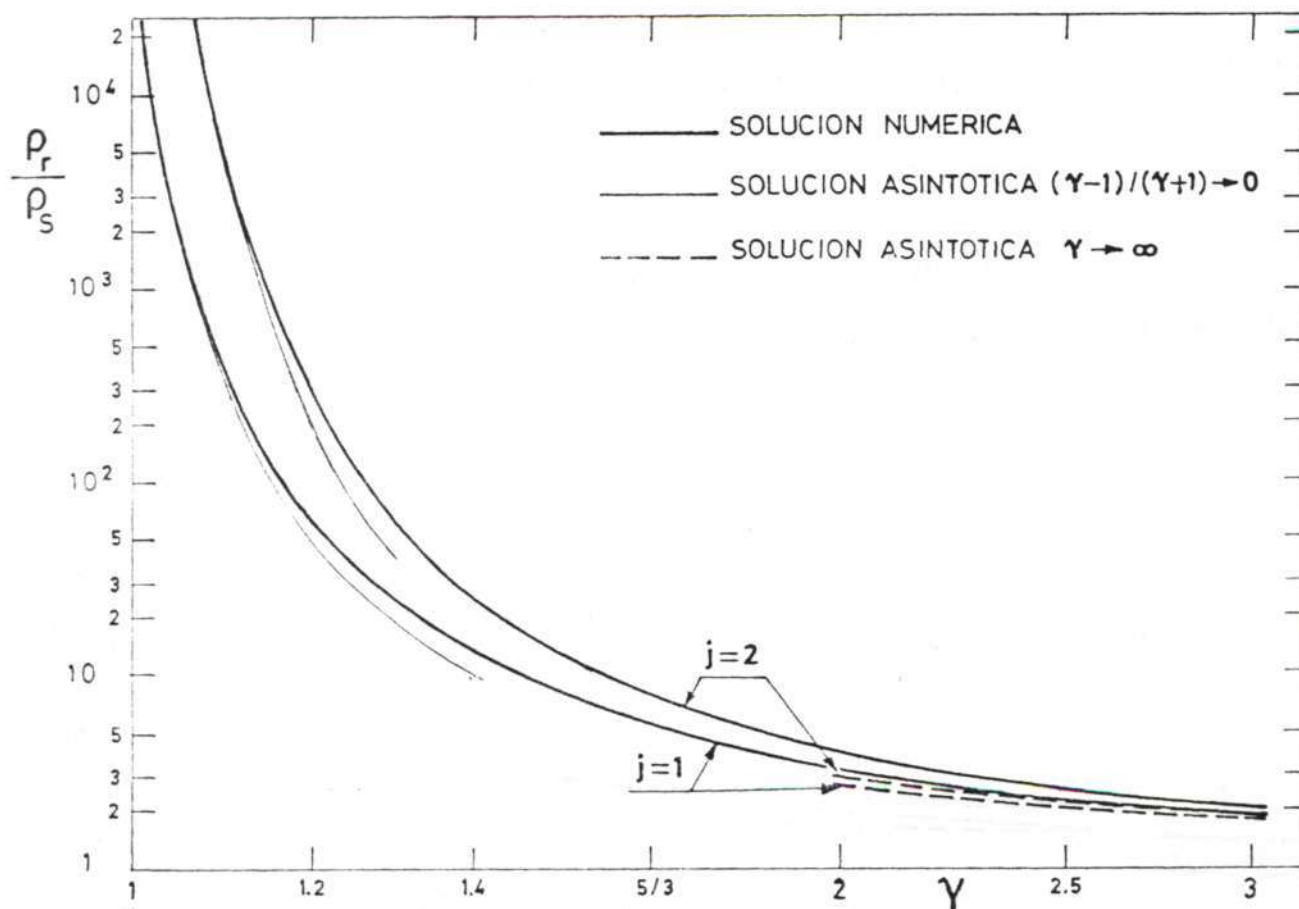
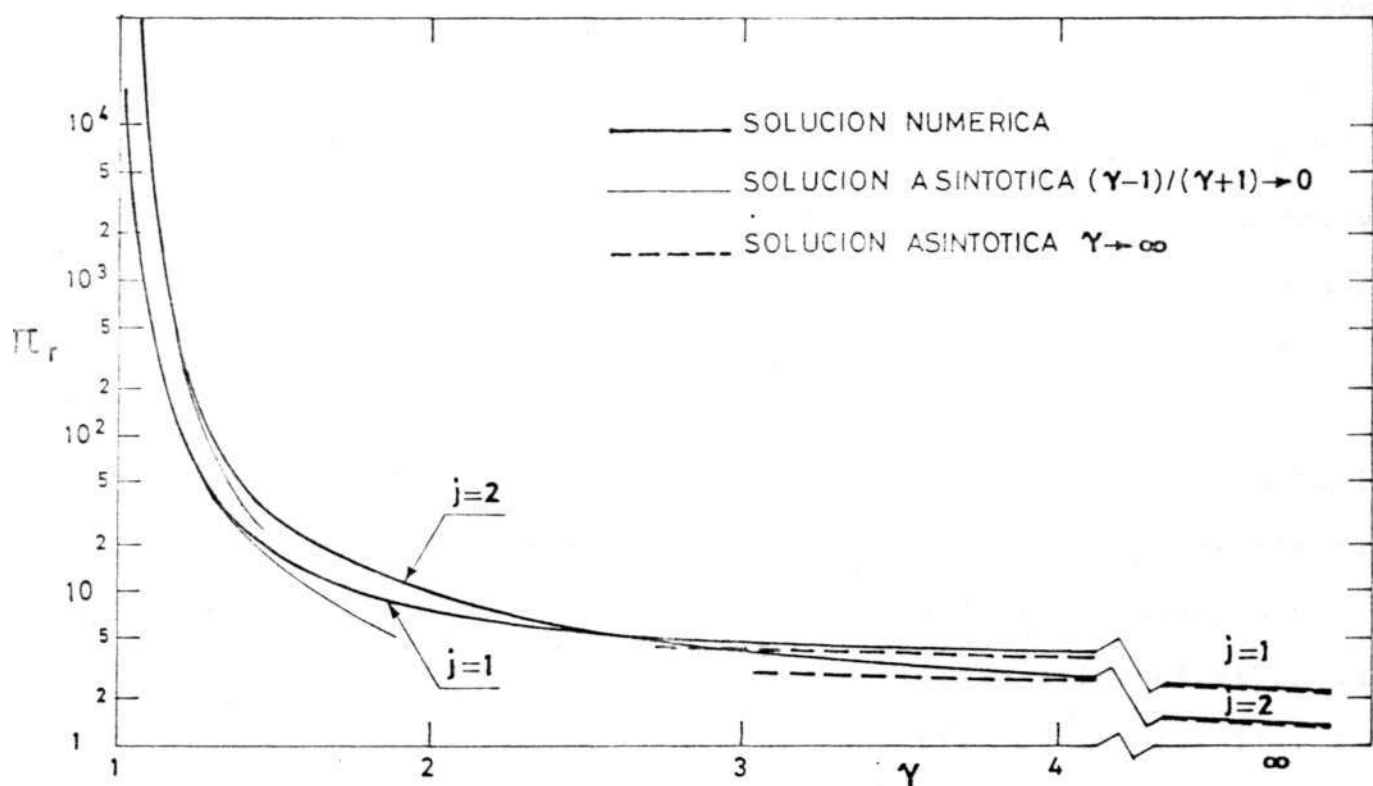
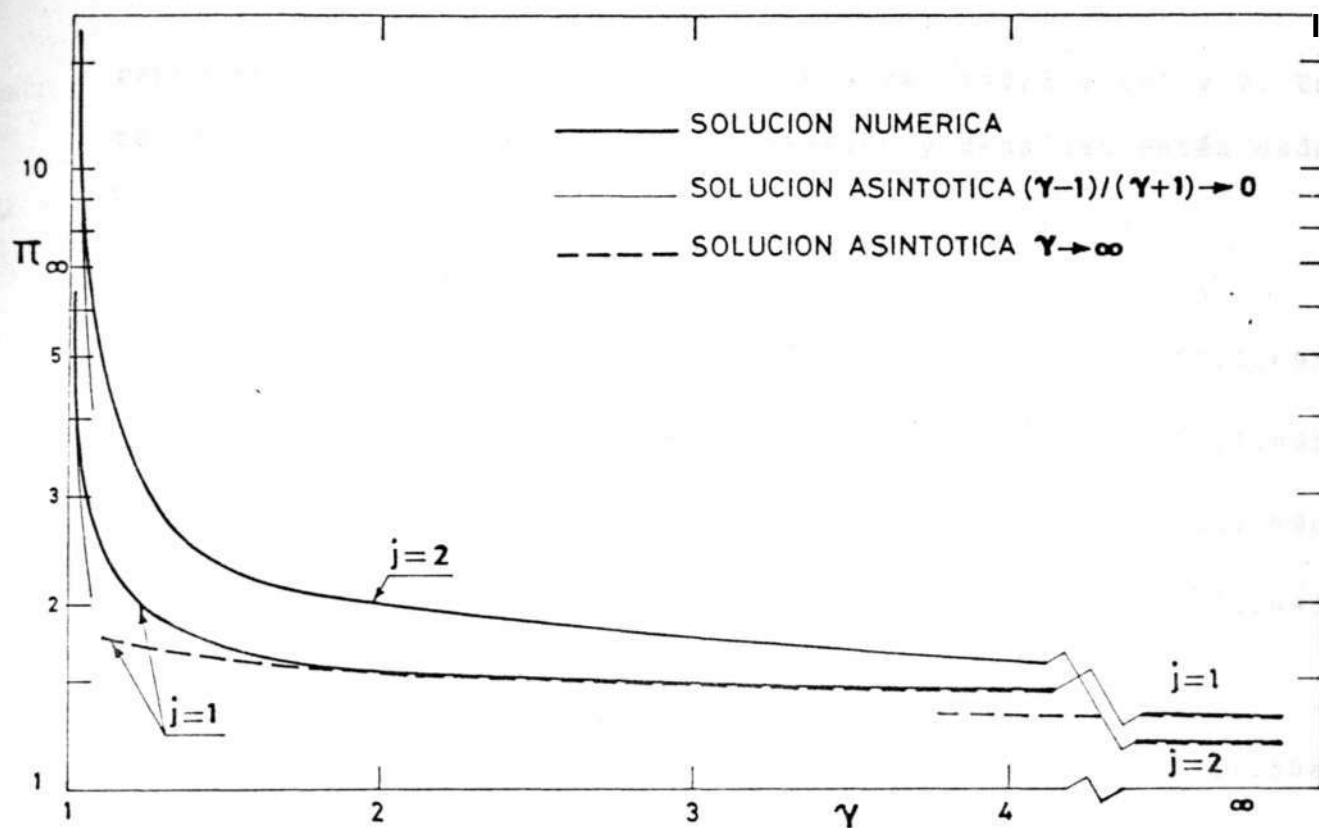


Fig. III.9. Densidad detrás de la onda de choque reflejada  $\rho_r(\gamma)$  en los casos cilíndrico y esférico.





representadas en las Figs. III.12-14 para  $\gamma=5/3$  y  $j=1$  y  $2$ . Estas distribuciones de velocidad, presión y densidad están dadas por:

a) Radio fijo,  $r=r_s$

$$|u/u_s| = (\gamma+1)\lambda^{1/\alpha_0}|v|/2 \quad (\text{III.49a})$$

$$p/p_s = (\gamma+1)\lambda^{2/\alpha_0}RZ/2\gamma \quad (\text{III.49b})$$

$$\rho/\rho_s = (\gamma-1)R/(\gamma+1) \quad (\text{III.49c})$$

$$|t/t_s| = \lambda^{-1/\alpha_0} \quad (\text{III.49d})$$

b) Tiempo fijo,  $t=t_s$

$$|u/u_s| = (\gamma+1)\lambda|v|/2 \quad (\text{III.50a})$$

$$p/p_s = (\gamma+1)\lambda^2RZ/2\gamma \quad (\text{III.50b})$$

$$\rho/\rho_s = (\gamma-1)R/(\gamma+1) \quad (\text{III.50c})$$

$$r/r_s = \lambda \quad (\text{III.50d})$$

En ambos casos  $r_s$  y  $t_s$  están relacionados de la forma:  $r_s = |Ct_s|^{\alpha_0}$ . El tiempo es negativo mientras  $\lambda$  crece,  $t=0$  cuando  $\lambda \rightarrow \infty$  y  $t>0$  cuando  $\lambda$  decrece desde  $\infty$ . La velocidad  $u$  es negativa cuando está dirigida hacia el centro de simetría, por lo que su signo coincide con el signo del producto  $tv$ . Las magnitudes de adimensionalización están dadas en (III.46).

En la Fig. III.15 se han representado las trayectorias de varias capas fluidas en el caso  $\gamma=5/3$  y  $j=2$ . En esta figura también se han representado las distribuciones de densidad en dos instantes de tiempo anterior y posterior a la reflexión de la onda de choque en el centro de simetría. En la Fig. III.16 se vuelven a representar las trayectorias junto con las distribucio-

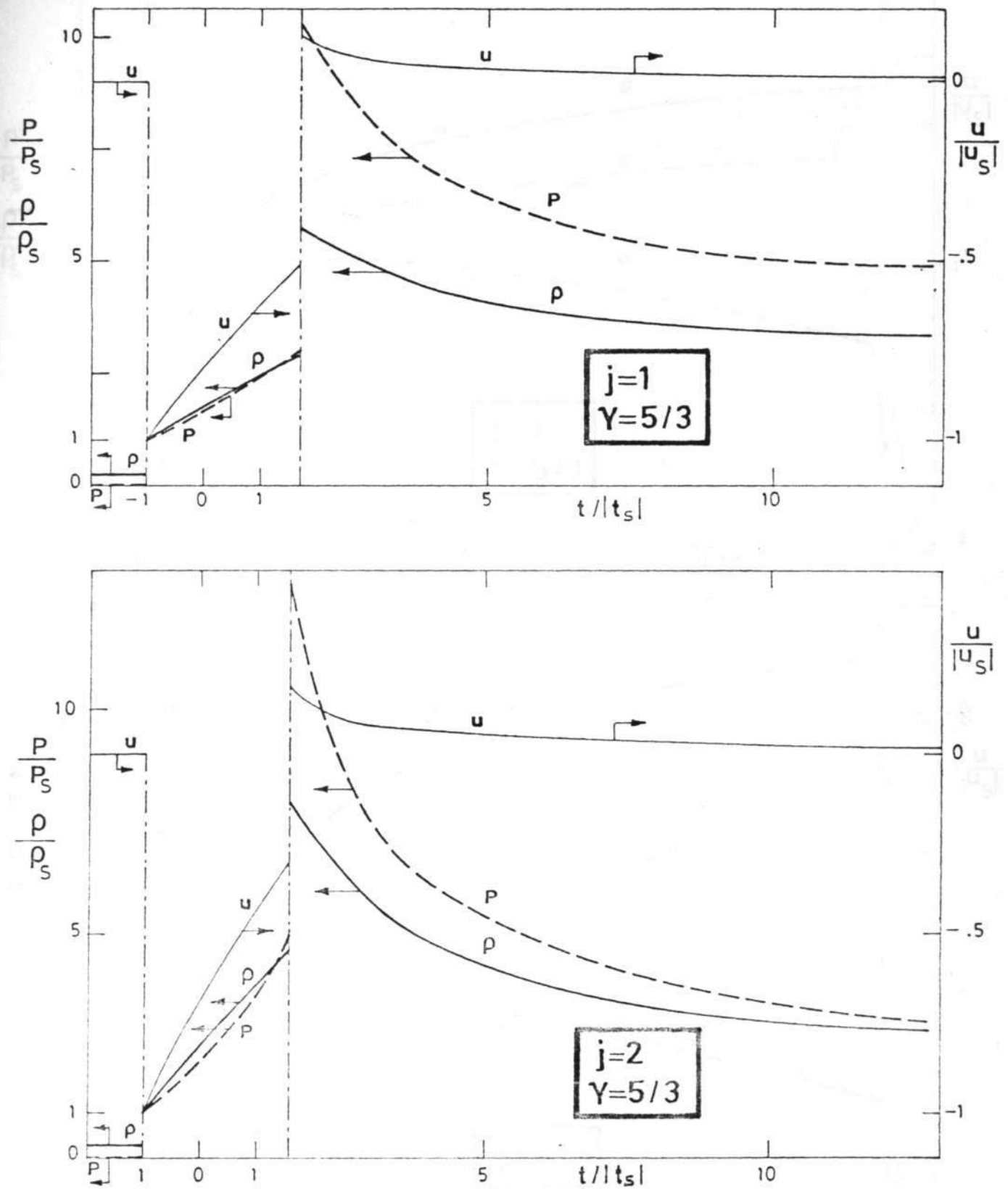


Fig.III.12. Distribuciones de velocidad,  $u$ , presión,  $p$ , y densidad,  $\rho$ , observadas en un radio fijo  $r=r_s$ , como función del tiempo.

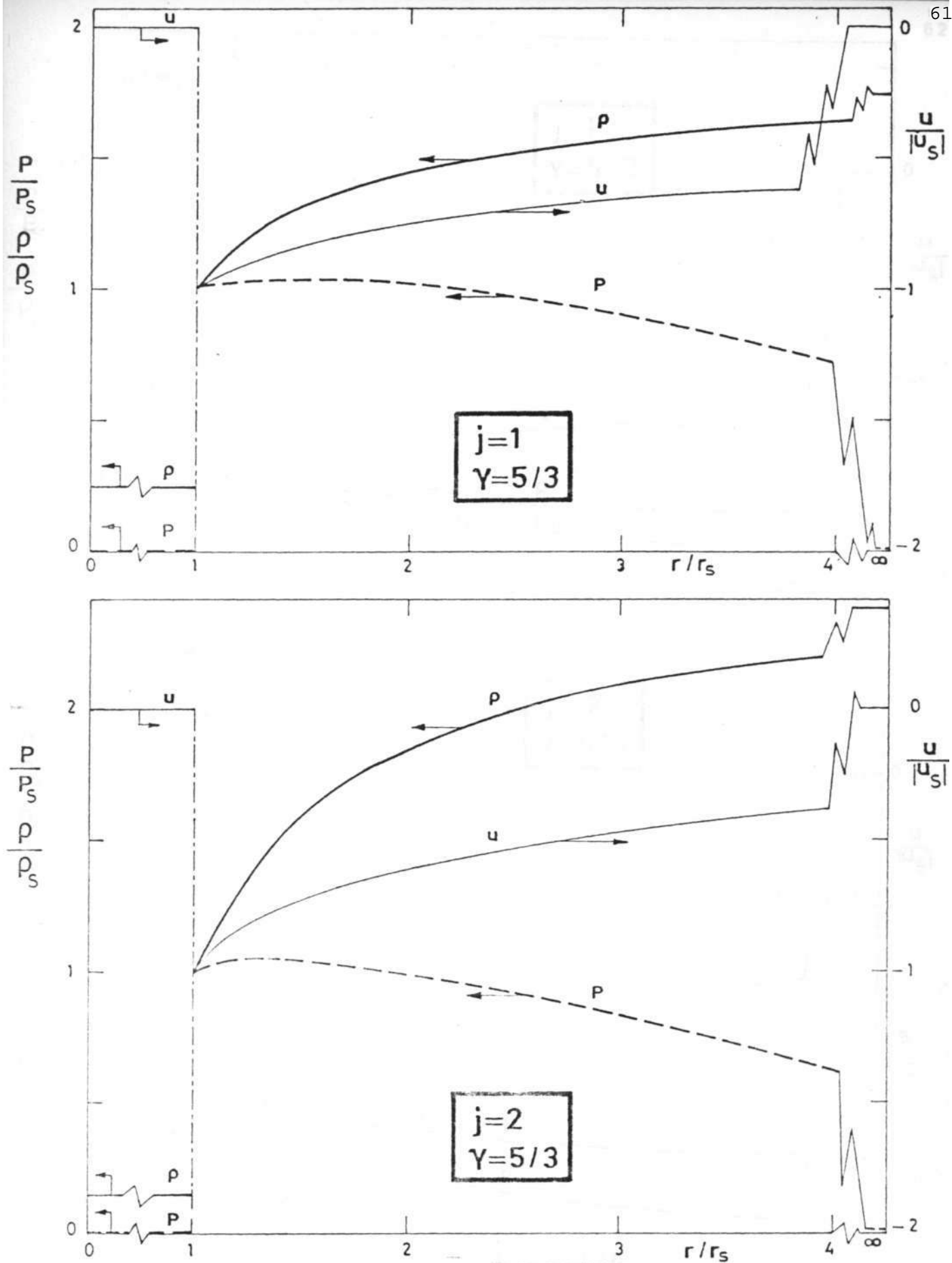


Fig. III.13. Distribuciones de velocidad,  $u$ , presión,  $p$ , y densidad,  $\rho$ , observadas a lo largo del radio en un instante ( $t_s < 0$ ) anterior a la reflexión de la onda de choque en el centro (eje) de simetría.

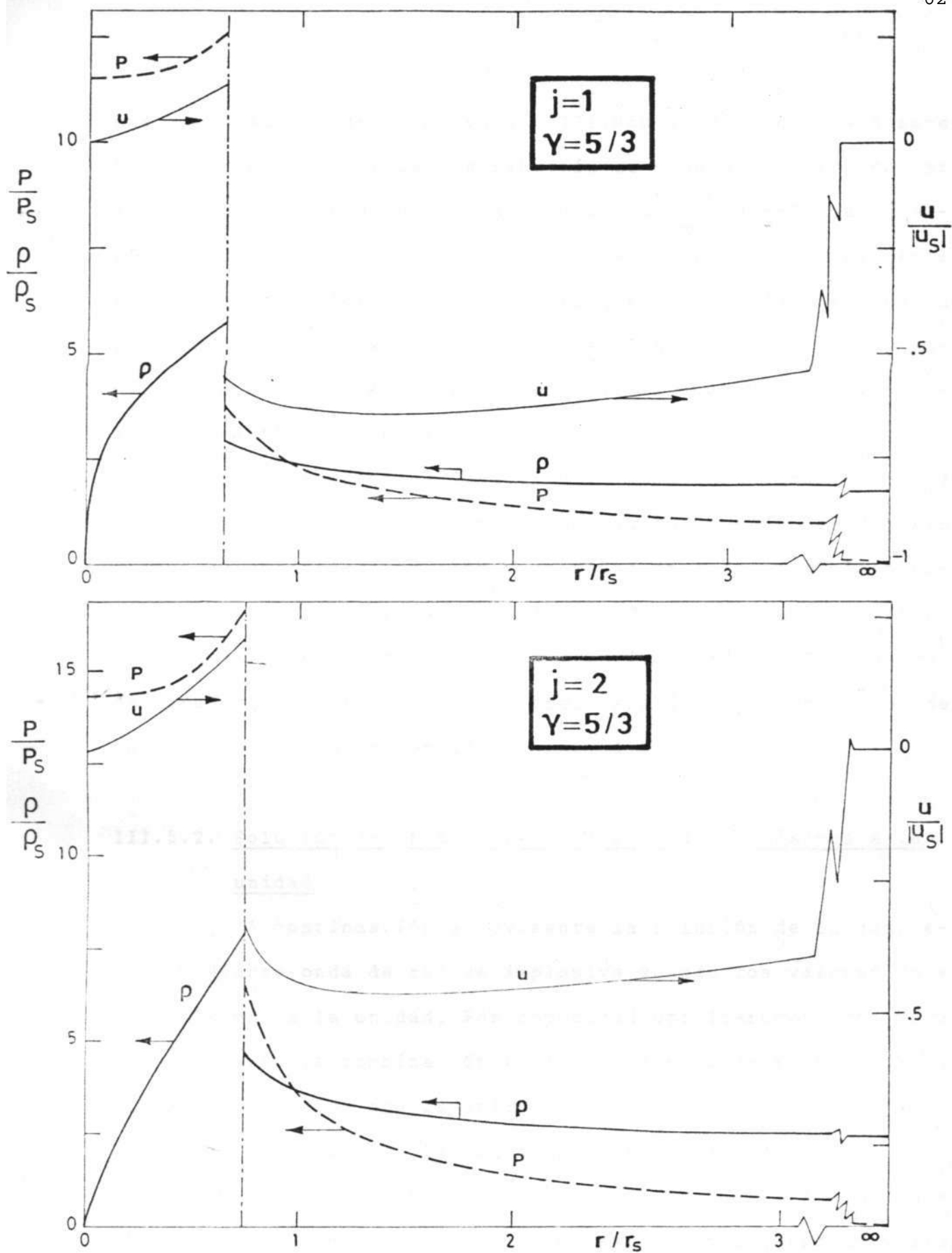


Fig.III.14. Distribuciones de velocidad,  $u$ , presión,  $p$ , y densidad,  $\rho$ , observadas a lo largo del radio en un instante ( $t_s > 0$ ) posterior a la reflexión de la onda de choque en el centro (eje) de simetría.

nes de presión y densidad (ecs. (III.45b y c)) a que está sometida la capa fluida. La distribución de presiones  $p(t)$  de esta figura, hasta que encuentra a la onda de choque reflejada, sería la distribución de presiones que es necesario imponer en la superficie exterior de la bola para que la solución de semejanza fuese solución exacta de las ecuaciones durante todo el período implosivo y explosivo, hasta que la onda reflejada alcanza la superficie exterior.

En el apéndice A se da una tabla de valores de  $a(Y)$ . También se dan, en este mismo apéndice, tablas con las distribuciones de velocidad, presión y densidad en función de la posición y del tiempo para  $\gamma=1.05, 1.4, 5/3, \gamma_c, 2, 3, 25$  e infinito en los casos cilíndrico ( $j=1$ ) y esférico ( $j=2$ ). También se dan gráficos con las distribuciones espaciales y temporales de velocidad, presión y densidad para  $\gamma=1.4$  y  $3$  ( $j=1$  y  $2$ ).

#### 111.5.2. Solución asintótica para valores de $Y$ próximos a la unidad

A continuación se presenta la solución de la compresión mediante onda de choque implosiva cuando los valores de  $Y$  son próximos a la unidad. Por comodidad utilizaremos como parámetro pequeño la combinación  $(\gamma-1)/(\gamma+1) = \varepsilon$  donde  $\varepsilon$  ha de ser un número mucho menor que la unidad.

Se buscará la solución de (III.9-11) en forma de desarrollos asintóticos (Colé, J.D.; 1968) de  $Z, R$  y  $\lambda$  como función de  $V$  y  $\varepsilon$  para  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dado que no existe un desarrollo uniformemente válido para todo  $V$ , se describirán  $Z(V, \varepsilon), R(V, \varepsilon)$  y  $A(V, \varepsilon)$  mediante dos desarrollos. El primero formado por la suma

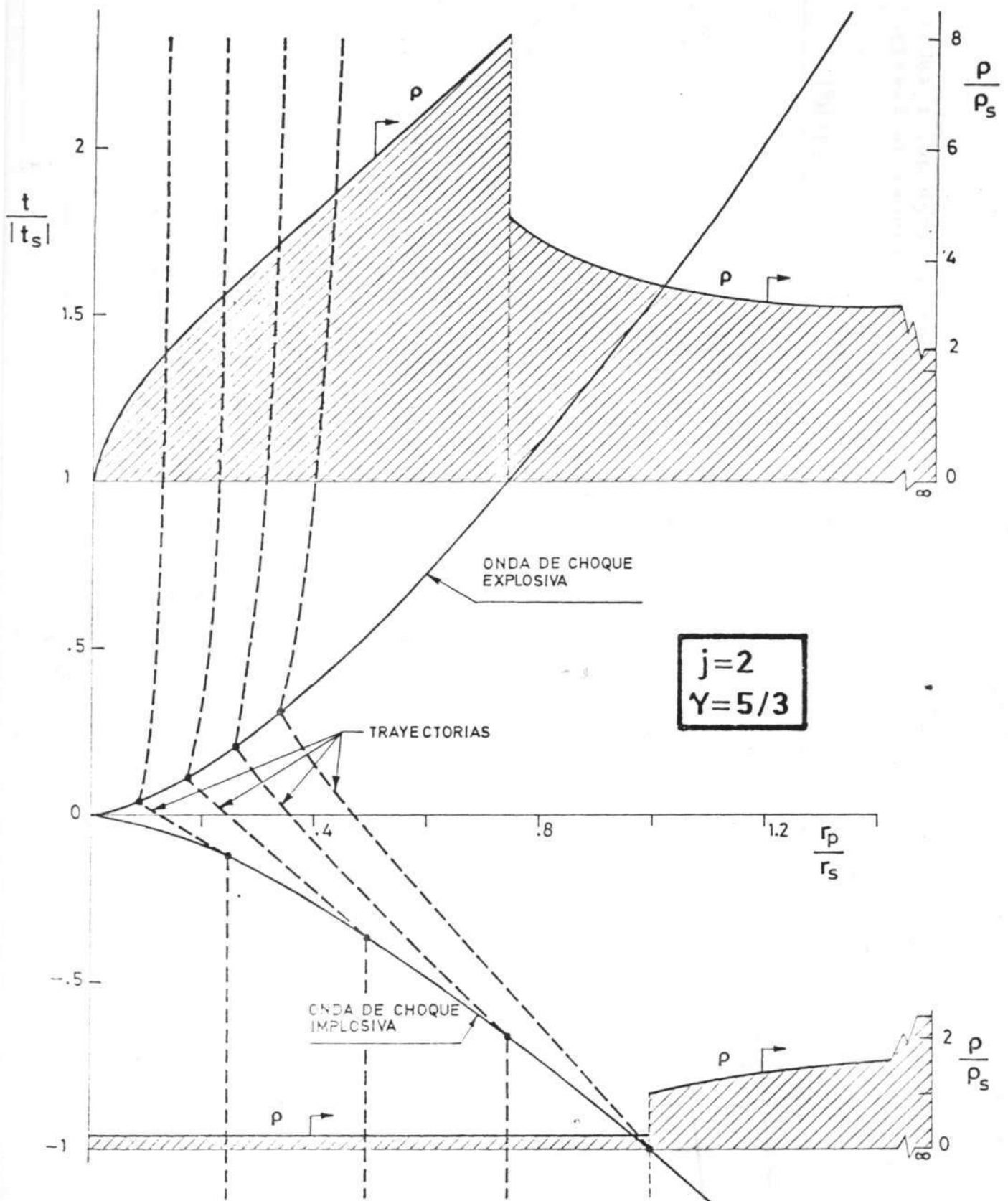
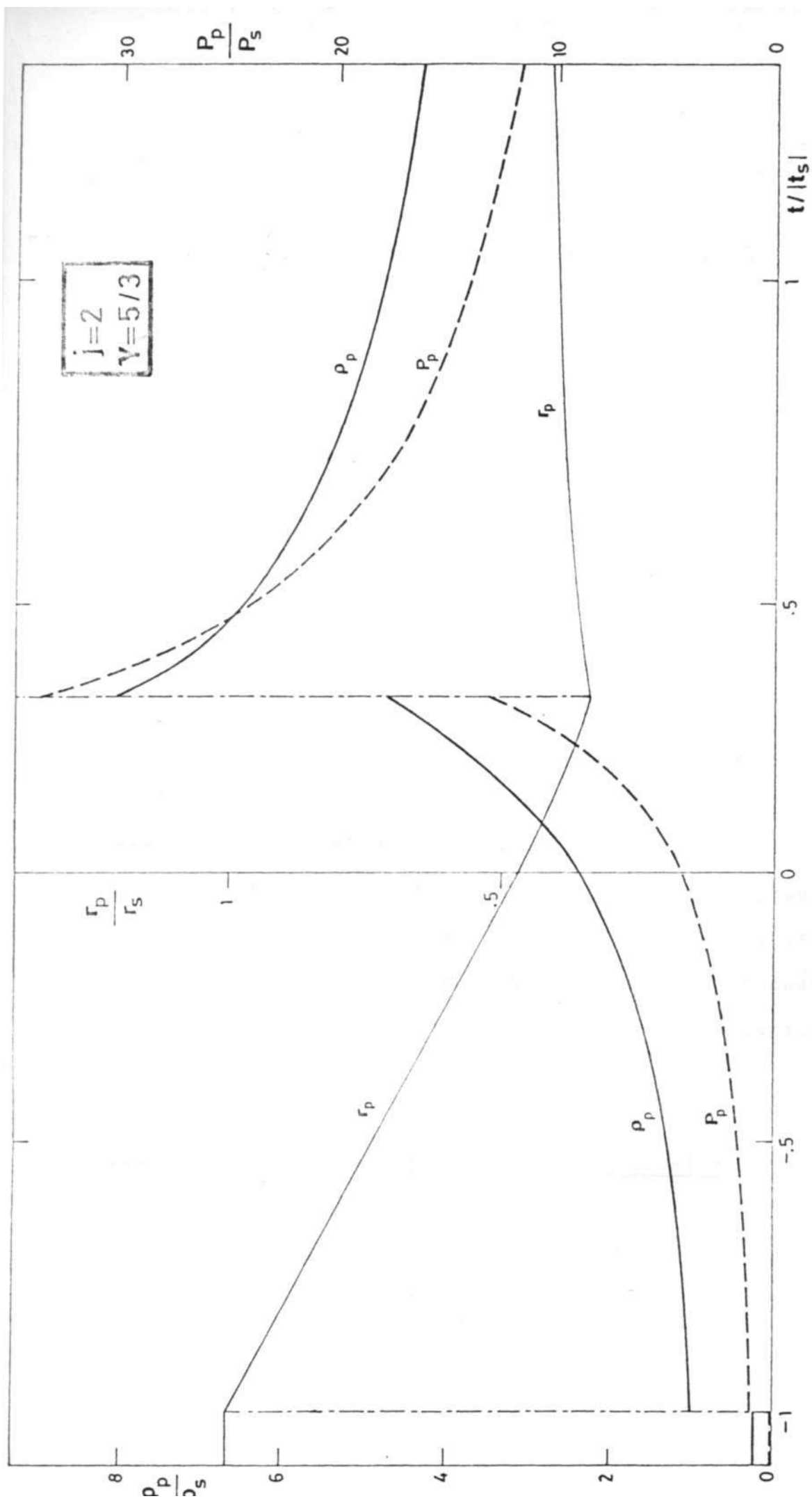


Fig.III.15. Trayectorias de las ondas de choque implosiva y explosiva, así como las de las distintas capas fluidas. Las zonas rayadas representan las distribuciones de densidad a lo largo del radio en dos instantes de tiempo,  $t = t_s < 0$  y  $t = -t_s > 0$ .



de funciones de  $V$  multiplicadas por funciones de  $\varepsilon$ , de órdenes crecientes, en una zona que se llamará exterior. Este primer desarrollo no es válido para valores de  $(1-V) \sim \varepsilon^{1/2}$ ; esto es, en las proximidades del punto singular  $(V_1^*, Z_1^*)$  y de la onda de choque implosiva  $(V_s, Z_s)$ . Para esta región, que se llamará interior, se utilizará un segundo desarrollo en la variable independiente  $(1-V) \sim \varepsilon^{1/2}$  en lugar de  $V$ . La solución interior describe la evolución del estado de las partículas fluidas durante la mayor parte de su movimiento implosivo, mientras que la solución exterior describe esta evolución durante los últimos momentos de la implosión y hasta el instante en que la partícula es alcanzada por la onda de choque reflejada.

La hipótesis de que el punto representativo, en el plano de las fases, de la onda de choque implosiva y del punto singular  $(V_1^*, Z_1^*)$  de la característica están próximos, fue utilizada, junto con otras hipótesis, por (Sudhanshu, S.Jha. y Chavda, L.K.; 1976) para obtener una solución aproximada al problema de la implosión y aplicarlo al caso  $\gamma = 5/3$ ,  $j=2$ . Esta aproximación solo está justificada para  $\gamma \rightarrow 1$ , que es cuando la onda de choque implosiva y el punto singular de la característica están próximos.

#### III.5.2.1. Solución para el período implosivo

Las condiciones en la onda de choque implosiva (III.16-18), escritas en función de  $\varepsilon$ , sitúan a dicha onda en

$$V_s = 1 - \varepsilon ; \quad Z_s = \varepsilon(1 - \varepsilon) ; \quad R_s = 1/\varepsilon ; \quad \lambda_s = 1 \quad (\text{III.51})$$



Admitiendo que  $\theta_0 \sim \varepsilon^{1/2}$  y que  $Z \sim \varepsilon V^2$  para todo  $V$ , la solución de las ecuaciones (III.9-11) puede escribirse mediante los desarrollos

$$Z = (V/M_\infty)^2 + \dots \quad (\text{III.52a})$$

$$\text{Ln}(R/R_\infty) = j \text{Ln}(1-V) + \sqrt{\varepsilon} j(j+1)V/(1-V) + \dots \quad (\text{III.52b})$$

$$\text{Ln}(\lambda/\lambda_\infty) = -\text{Ln}|V| + \sqrt{\varepsilon} j \text{Ln}|V/(1-V)| + \dots \quad (\text{III.52c})$$

que no son válidos si  $(1-V) \sim \varepsilon^{1/2}$ . Las constantes  $M$ ,  $R$  y  $\lambda$  son las mismas que aparecen en (III.25), correspondientes a la forma de la solución en las proximidades del punto singular del origen ( $V=0, Z=0$ ). Estas constantes se determinarían mediante las condiciones de acoplamiento de (III.52) con la solución para la región donde  $(1-V) \sim \varepsilon^{1/2}$ ; la no singularidad de (III.52a) en  $V=1$  nos permite anticipar que en esta región  $Z = \varepsilon + o(\varepsilon)$  y por lo tanto podemos calcular  $M$  en primera aproximación:  $M = 1/\varepsilon^{1/2} + \dots$ .

Por otra parte si  $Z_1^* = \varepsilon + o(\varepsilon)$  las ecuaciones (III.20) proporcionan la posición del punto singular ( $v_1^*, z_1^*$ ) y  $\theta_0$  en primera aproximación

$$v_1^* = 1 - \sqrt{\varepsilon} + \dots; \quad z_1^* = \varepsilon + \dots; \quad \theta_0 = -j\sqrt{\varepsilon} + \dots$$

Puede observarse que los órdenes de magnitud  $Z$  y  $\theta_0$  coinciden con los supuestos anteriormente.

Las trayectorias en esta región exterior están dadas por (III.41-42), sustituyendo en ellas el valor de  $\lambda(V)$  dado por (III.52c). La descripción paramétrica de las trayectorias es:

$$\text{Ln}|t/t_\infty| = \text{Ln}|V/(1-V)| - \sqrt{\varepsilon} j V/(1-V) + \dots \quad (\text{III.53a})$$

$$\text{Ln}(r_p/r_\infty) = -\text{Ln}(1-V) - \sqrt{\varepsilon} j V/(1-V) + \dots \quad (\text{III.53b})$$

$t_\infty$  y  $r_\infty$  son dos constantes de integración que, al igual que  $R_\infty$

y  $\lambda_{oo}$ , no se pueden determinar con las condiciones en la onda de choque que se encuentra en las proximidades de  $V = 1$  y allí (III.53) se hacen singulares. Estas constantes indeterminadas en la solución exterior se pueden obtener del empalme de esta solución con la interior que se determina a continuación. El empalme de ambas soluciones determina también las correcciones a los valores ya conocidos, en primera aproximación, de  $M_{oo}$ ,  $V_1^*$ ,  $Z_1^*$  y  $\theta_0$ . Estas correcciones las supondremos de la forma:

$$1/M_{\infty} = \sqrt{\epsilon} (1 + \sqrt{\epsilon} a) + \dots \quad (\text{III.54a})$$

$$V_1^* = 1 - \sqrt{\epsilon} (1 + \sqrt{\epsilon} \chi) + \dots \quad (\text{III.54b})$$

$$Z_1^* = \epsilon (1 + \sqrt{\epsilon} \pi) + \dots \quad (\text{III.54c})$$

$$\theta_0 = -j\sqrt{\epsilon} (1 + \sqrt{\epsilon} v) + \dots \quad (\text{III.54d})$$

sustituyendo (III.54b-d) en (III.20) se obtienen las relaciones

$$\chi = 2 + v \quad ; \quad \pi = 2(2 + v) \quad (\text{III.55})$$

Dado que en las proximidades del punto singular  $(V_1^*, Z_1^*)$  es  $(V - 1) \sim \{(Z/\epsilon) - 1\} \sim \epsilon^{1/2}$  para obtener la solución de (III.9-11) y las trayectorias (III.41-42) en sus proximidades, utilizaremos las variables

$$\eta = (V - V_1^*)/\sqrt{\epsilon} \quad ; \quad \xi = (Z - Z_1^*)/\epsilon\sqrt{\epsilon} \quad (\text{III.56})$$

En estas nuevas variables, el punto singular  $(V_1^*, Z_1^*)$  está situado en  $\eta^* = \xi^* = 0$ ; mientras que la onda de choque implosiva (III.51) está situada en  $1 - \eta_s = -\epsilon^{1/2}(1 + v) + \dots$ ,  $\xi_s = -2(2 + v) + \dots$ . La solución de (III.9-11) y (III.41-42) para  $\eta \sim 1$ , si la trayectoria resultante pasa por el punto singular  $(V_1^*, Z_1^*)$  y se cum-

plen las condiciones de salto en la onda implosiva, viene dada por:

$$\xi = 2\eta + \{2j/(j+1)\} \text{Ln} |(j+2-\eta)/(j+2)(1-\eta)| + \dots \quad (\text{III.57a})$$

$$\text{Ln } R = - \text{Ln } \varepsilon + j \text{Ln} \{1+(1-\eta)/(j+1)\} + \dots \quad (\text{III.57b})$$

$$\text{Ln } \lambda = \sqrt{\varepsilon} (1-\eta) - j\sqrt{\varepsilon} \text{Ln} \{1+(1-\eta)/(j+1)\} + \dots \quad (\text{III.57c})$$

$$\begin{aligned} \text{Ln}(t/t_s) = \text{Ln}(r/r_s) = & - \{ \text{Ln} |(1-\eta)/\sqrt{\varepsilon}| + \\ & + j \text{Ln} [1+(1-\eta)/(j+1)] - \text{Ln} |1+v| \} / (j+1) + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.57d})$$

obteniéndose también

$$v+3 = \{j/(j+1)\} \text{Ln} \{ \sqrt{\varepsilon} (j+2) |1+v| / (j+1) \} + 0(\sqrt{\varepsilon} \text{Ln} \varepsilon) \quad (\text{III.58})$$

La relación (III.58) determina la segunda aproximación de  $\theta_0$  y por lo tanto la de  $(V_1^*, Z_1^*)$  (ecs. (III.54b-d) y (III.55)). Dado que  $v < 0$  (en primera aproximación  $v \sim \text{Ln} \varepsilon$ ) con objeto de ampliar el margen de validez de (III.54d) es conveniente escribir  $\theta_0$  en la forma:  $\theta_0 = \{ -j\varepsilon^{1/2}/(1 - \varepsilon^{1/2}v) \} + o(\varepsilon \text{Ln} \varepsilon)$ .

### c) Acomplamiento de soluciones "exterior" e "interior"

La solución "exterior" (III.52-53) es válida para todo  $V$  excepto  $(1-V) \sim (\varepsilon^{1/2})$ , mientras que la "interior" (III.57) es válida para  $(1-V)/\varepsilon^{1/2} \sim o(1)$ . Ambas soluciones han de empalmar en una zona intermedia tal que  $(1-V) \rightarrow 0$  pero  $\eta \rightarrow -\infty$ . Para ello elegimos una variable intermedia  $\phi$ , de orden unidad, tal que  $1 - V = \varepsilon^\mu \phi$  y  $1 - \eta = \varepsilon^\mu \phi / \varepsilon^{1/2}$  siendo  $0 < \mu < 1/2$  para estar en una zona de validez común de los desarrollos "interior" y "exterior". Reescribiendo (III.52-53) y (III.57) en la variable  $\phi$  ambos desarrollos coinciden si

$$a = v + 3 - \{j/(j+1)\} \text{Ln}(j+2) + 0(\sqrt{\epsilon} \text{Ln} \epsilon) \quad (\text{III.59a})$$

$$\text{Ln } R_{\infty} = -\{(j+2)\text{Ln} \epsilon\}/2 - j \text{Ln}(j+1) + 0(\sqrt{\epsilon} \text{Ln} \epsilon) \quad (\text{III.59b})$$

$$\text{Ln } \lambda_{\infty} = j \sqrt{\epsilon} \text{Ln}\{(j+1)\sqrt{\epsilon}\} + 0(\epsilon \text{Ln} \epsilon) \quad (\text{III.59c})$$

$$\begin{aligned} \text{Ln}(t_{\infty}/t_s) = \text{Ln}(r_{\infty}/r_s) = \{[(j+2)\text{Ln} \epsilon]/2 + j \text{Ln}(j+1) + \\ + \text{Ln}|1+v|\}/(j+1) + 0(\sqrt{\epsilon} \text{Ln} \epsilon) \end{aligned} \quad (\text{III.59d})$$

Conocidos  $a$ ,  $R_{\infty}$ ,  $\lambda_{\infty}$ ,  $t_{\infty}/t_s$  y  $r_{\infty}/r_s$  queda determinada la solución "exterior".

#### III.5.2.2. Solución en la región interior a la onda de choque explosiva

El estado del fluido, para  $t > 0$ , en las proximidades del centro de simetría está representado por la solución de (III.9-11) en el entorno del punto singular ( $V = V_c, Z \rightarrow \infty$ ) dada en (III.31). En este entorno la solución puede escribirse, para valores pequeños de  $\epsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ , en la forma:

$$\frac{1}{Z} = \frac{(j+1)(j+3)}{2j\sqrt{\epsilon}} \left\{ 1 + \sqrt{\epsilon} \left[ \frac{j(j+5)}{j+3} - v \right] + \dots \right\} (V - V_c) \quad (\text{III.60a})$$

$$\text{Ln} R = \text{Ln} K_R + j \sqrt{\epsilon} \left\{ 1 + \sqrt{\epsilon} \left[ v - \frac{j(j-1)}{j+1} \right] + \dots \right\} \text{Ln}(V - V_c) \quad (\text{III.60b})$$

$$\text{Ln} \lambda = \text{Ln} K_{\lambda} + \frac{1}{2} \left\{ 1 - j \sqrt{\epsilon} \left[ 1 + \sqrt{\epsilon} \left( v - \frac{j(j-1)}{j+1} \right) \right] + \dots \right\} \text{Ln}(V - V_c) \quad (\text{III.60c})$$

Las trayectorias detrás de la onda reflejada pueden obtenerse directamente de (III.41-42) teniendo en cuenta que, como veremos a continuación,  $(V - V_c) \sim \epsilon \epsilon^{1/2}$  en esta zona y por lo tanto están dadas por:

$$\text{Ln}(r_p/r_s) = \text{Ln} K_r + (2j \sqrt{\epsilon} \text{Ln}|t/t_s|)/(j+1) + \dots \quad (\text{III.60d})$$

Aunque las expresiones (III.60) sólo son válidas para  $\varepsilon > 0$  y  $V > V_c$ , veremos a continuación que las condiciones de salto a través de una onda de choque (III.13-14) son tales que el punto  $(V_2, Z_2)$ , correspondiente al estado del fluido detrás de la onda explosiva, está situado en la zona de validez de (III.60) y por ello estas expresiones describen el estado del fluido en el interior de la onda de choque reflejada.

### III.5.2.3. Salto a través de la onda de choque explosiva

Con las condiciones de salto a través de una onda de choque (III.13-14) y la solución delante de la onda de choque explosiva (III.52a) se puede obtener el lugar geométrico de los puntos  $Z = Z(V_2)$  representativos del estado del fluido detrás de dicha onda, cuando el estado delante de ella  $(V_1, Z_1)$  se mueve sobre (III.52a). La curva  $Z_2 = Z(V_2)$  no corta a la solución representativa del campo fluido detrás de la onda de choque explosiva (III.60a) a menos que  $-V_1 \sim o(1/\varepsilon)$ . Esto último implica que  $Z_1 \sim o(1/\varepsilon)$ ,  $Z_2 \sim o(1/\varepsilon)$  y  $(V_2 - V_c) \sim o(\varepsilon \varepsilon^{1/2})$ , por lo que es válida la solución (III.60) en todo el campo fluido detrás de la onda de choque reflejada.

Las condiciones de salto (III.13-15) y las soluciones (III.52) y (III.60) nos permiten obtener:

$$V_1 = -\frac{1}{2\varepsilon} \left[ 1 - \sqrt{\varepsilon} \left( \frac{2j}{j+1} + a \right) + o(\varepsilon \ln \varepsilon) \right] \quad (\text{III.61a})$$

$$Z_1 = \{ 1 - 4j\sqrt{\varepsilon}/(j+1) + o(\varepsilon \ln \varepsilon) \} / 4\varepsilon \quad (\text{III.61b})$$

$$V_2 - V_c = \frac{4j\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{(j+1)(j+3)} \left\{ 1 + \sqrt{\varepsilon} \left[ v + a + \frac{4j}{j+1} - \frac{j(j+5)}{j+3} \right] + o(\varepsilon \ln \varepsilon) \right\} \quad (\text{III.61c})$$

$$Z_2 = \frac{1}{2\varepsilon} \left[ 1 - \sqrt{\varepsilon} \left( \frac{4j}{j+1} + a \right) + o(\varepsilon \ln \varepsilon) \right] \quad (\text{III.61d})$$

$$\text{Ln}R_1 = -\{(3j+2)\text{Ln}\epsilon\}/2-j\text{Ln}\{2(j+1)\}+0(\sqrt{\epsilon}\text{Ln}\epsilon) \quad (\text{III.61e})$$

$$\text{Ln}R_2 = -\{(3j+4)\text{Ln}\epsilon\}/2-j\text{Ln}\{2(j+1)\}-\text{Ln}2+0(\sqrt{\epsilon}\text{Ln}\epsilon) \quad (\text{III.61f})$$

$$\text{Ln}\lambda_r = \text{Ln}(2\epsilon)+j\sqrt{\epsilon}\text{Ln}\{\sqrt{\epsilon}(j+1)\}+\sqrt{\epsilon}\{2j/(j+1)+a\}+0(\epsilon\text{Ln}\epsilon) \quad (\text{III.61g})$$

siendo  $v_c = \sqrt{\epsilon}\{2j(1+\sqrt{\epsilon}v)/(j+1)\}+0(\epsilon\text{Ln}\epsilon)$ .

Las constantes  $K_R$ ,  $K_\lambda$ , y  $K_r$  (ecs. (III.60b-d)) se obtienen de la condición  $R(V_2) = R_2$  y de la continuidad en la onda de choque reflejada,  $(V=V_1)$ , de  $\lambda$ ,  $r_p$  y  $t$ .

$$\text{Ln}K_R = -\{(3j+4)\text{Ln}\epsilon\}/2-j\text{Ln}\{2(j+1)\}-\text{Ln}2+0(\sqrt{\epsilon}\text{Ln}\epsilon) \quad (\text{III.62a})$$

$$\begin{aligned} \text{Ln}K_\lambda^2 = & \text{Ln}\{\sqrt{\epsilon}(j+1)(j+3)/j\}+j\sqrt{\epsilon}\text{Ln}\{4j(j+1)\epsilon^2\sqrt{\epsilon}/(j+3)\}+ \\ & +\sqrt{\epsilon}\{a-v+j(j+5)/(j+3)\}+0(\epsilon\text{Ln}\epsilon) \end{aligned} \quad (\text{III.62b})$$

$$\begin{aligned} \text{Ln}K_r = & \{(3j+4)\text{Ln}\epsilon\}/2(j+1)+\text{Ln}2+ \\ & +\{\text{Ln}|1+v|+j\text{Ln}(j+1)\}/(j+1)+0(\sqrt{\epsilon}\text{Ln}\epsilon) \end{aligned} \quad (\text{III.62c})$$

#### III.5.2.4. Resultados

La solución obtenida para  $\gamma \rightarrow 1$  nos indica que las trayectorias de las distintas capas fluidas prácticamente coinciden con la de la onda de choque implosiva, de velocidad constante  $dR_i(t)/dt=C$  en primera aproximación, durante la mayor parte del período implosivo (ec. (III.62)); separándose en tiempos muy próximos a  $t=0$ , en cuyo instante  $r_p/r_s \rightarrow \epsilon^{(j+2)/2(j+1)}$  (ecs. (III.63)). En estas condiciones, toda la masa de fluido alcanzado por la onda de choque y puesto en movimiento por ella queda confinado en una cascara esférica de espesor muy delgado y radio decreciente, por lo que la densidad se hace muy alta. Para  $t>0$  el radio exterior de la bola sigue disminuyendo hasta alcanzar

valores de orden  $\varepsilon^{(3j+2)/2(j+1)}$  cuando se encuentra con la onda de choque reflejada (cuya velocidad de propagación es del orden de  $\varepsilon$  (ec. (III.60f)) comparada con la de la onda incidente) manteniéndose posteriormente prácticamente constante. En estas condiciones la densidad del fluido, relativa a la densidad inicial  $\rho_0$ , pasa de ser la unidad delante de la onda imolosa a valer  $1/\varepsilon$  detrás de ella, para alcanzar posteriormente valores del orden de  $\varepsilon^{-(3j+2)/2}$  delante de la onda reflejada y del orden de  $\varepsilon^{-(3j+4)/2}$  detrás de ella, decreciendo en tiempos posteriores según la ley  $|t/t_s|^{-2j\varepsilon^{1/2}}$ .

Mediante la solución asintótica  $\gamma \rightarrow 1$ , hemos obtenido  $\theta_0 = -j\varepsilon^{1/2} + o(\varepsilon^{1/2} \ln \varepsilon)$ . Es interesante observar que el valor aproximado obtenido por (Whitham, G.B.; 1974) para  $\theta_0(\gamma)$  da, al desarrollarlo para valores pequeños de  $(\gamma - 1)$ , un primer término que coincide con el obtenido aquí.

En las Figs. III.6, 8, 9, 10 y 11 se han representado los valores de  $\alpha_0$ ,  $\rho_{\infty}/\rho_s$ ,  $\rho_r/\rho_s$ ,  $\Pi_{\infty}$  y  $\pi_r$  como función de  $\gamma$ , obtenidos de la solución numérica. Como comparación se representan también los mismos valores obtenidos mediante esta solución asintótica, dados por:

$$\alpha_0 = 1/(1-\theta_0) ; \quad \theta_0 = -j\sqrt{\varepsilon}/(1-\sqrt{\varepsilon}\nu)$$

$$\ln(\rho_{\infty}/\rho_s) = -(j \ln \varepsilon)/2 - j \ln(j+1) + o(\sqrt{\varepsilon} \ln \varepsilon)$$

$$\ln(\rho_r/\rho_s) = -\{(3j+2) \ln \varepsilon\}/2 - j \ln\{2(j+1)\} - \ln 2 + o(\sqrt{\varepsilon} \ln \varepsilon)$$

$$\ln \Pi_{\infty} = -(j \ln \varepsilon)/2 - j \ln(j+1) + o(\sqrt{\varepsilon} \ln \varepsilon)$$

$$\ln \pi_r = -\{(3j+2) \ln \varepsilon\}/2 - j \ln\{2(j+1)\} + o(\sqrt{\varepsilon} \ln \varepsilon)$$

Una buena correlación con los resultados numéricos se

obtiene corrigiendo estas expresiones con un término de la forma  $\varepsilon^{1/2}(A_i + B_i \text{Ln} \varepsilon)$ , que habría de obtenerse reteniendo en el análisis términos de orden superior, pero que sin embargo calcularemos dando a  $A_i$  y  $B_i$  valores tales que las expresiones anteriores den el resultado numérico correspondiente a  $\gamma = 1.4$  y  $5/3$ ; tendremos así:

$$\text{Ln}(\rho_{\infty}/\rho_s) = -(j \text{Ln} \varepsilon)/2 - j \text{Ln}(j+1) + \sqrt{\varepsilon}(A_1 + B_1 \text{Ln} \varepsilon)$$

$$\text{Ln}(\rho_r/\rho_s) = -\{(3j+2) \text{Ln} \varepsilon\}/2 - j \text{Ln}\{2(j+1)\} - \text{Ln} 2 + \sqrt{\varepsilon}(A_2 + B_2 \text{Ln} \varepsilon)$$

$$\text{Ln} \pi_{\infty} = -(j \text{Ln} \varepsilon)/2 - j \text{Ln}(j+1) + \sqrt{\varepsilon}(A_3 + B_3 \text{Ln} \varepsilon)$$

$$\text{Ln} \pi_r = -\{(3j+2) \text{Ln} \varepsilon\}/2 - j \text{Ln}\{2(j+1)\} + \sqrt{\varepsilon}(A_4 + B_4 \text{Ln} \varepsilon)$$

donde los valores de  $A_i$  y  $B_i$  son:

j	$A_1$	$B_1$	$A_2$	$B_2$	$A_3$	$B_3$	$A_4$	$B_4$
1	0.26	-0.63	2	0.36	1.33	0.25	2.72	1.32
2	1.43	-1.39	4.77	2.25	3.11	-0.037	5.42	2.67

### III.5.3. Solución asintótica para valores grandes de $\gamma$

En el límite asintótico  $\gamma$  la onda de choque implosiva en el plano de las fases  $(Z, V)$  está situada en  $Z_s = 2$  y  $V = 0$ ; mientras que la densidad  $R_s = 1$  (ecs. (III.16-18)). El punto singular  $(V_1^*, Z_1^*)$  está situado en  $V_1^* = 0$ ,  $Z_1^* = 1$ . Como la solución que arranca de la onda de choque ha de pasar por el punto singular  $(V_1^*, Z_1^*)$  y por el origen  $(V=0, Z=0)$ , es evidente que dicha solución colapsa en el eje  $V=0$ . Con objeto de dilatar la escala, tomaremos como nuevas variables de orden unidad  $\gamma V$  y  $R^\gamma$  dejando  $\lambda$  y  $Z$  invariables. En estas nuevas variables la onda de choque



está situada en

$$(\gamma V)_s = 2; \quad Z_s = 2; \quad R_s^\gamma = 2; \quad \lambda_s = 1 \quad (\text{III.63})$$

mientras que el punto singular  $(V_1, Z_1)$  (ec. (III.20)) está dado por:

$$(\gamma V)_1^* = -2\theta_0/(\theta_0 + j); \quad Z_1^* = 1 \quad (\text{III.64})$$

En estas nuevas variables, la línea característica  $Z = (1 - V)^2$  se convierte en la recta  $Z = 1$  en primera aproximación.

Las ecuaciones (III.9, 10 y 12), que determinan la solución, pueden escribirse como

$$\frac{d\bar{Z}}{d(\gamma V)} = Z \frac{2Z + \theta_0\{(\gamma V) + 2\} + j(\gamma V) - 2}{Z\{(j+1)(\gamma V) + 2\theta_0\} - (\gamma V)(1 - \theta_0)} \quad (\text{III.65a})$$

$$\frac{d\{\text{Ln} R^\gamma\}}{d(\gamma V)} = \frac{2\theta_0 Z + (j + \theta_0)(\gamma V)}{Z\{(j+1)(\gamma V) + 2\theta_0\} - (\gamma V)(1 - \theta_0)} \quad (\text{III.65b})$$

$$\lambda^{2(1 - \theta_0)} = KR^\gamma / Z \quad (\text{III.65c})$$

Las pendientes de (III.65a-b) en el punto singular  $(V_1, Z_1)$ , necesarias para la determinación de  $\theta_0$ , son las dadas en (III.37a-b) que para  $\gamma \rightarrow \infty$  se reducen a

$$\{dZ/d(\gamma V)\}_1^* = (\theta_0 + j)\{\theta_0 + j - 2 - \sqrt{(\theta_0 + j - 2)^2 + 8\theta_0(\theta_0 - 1)}\}/4\theta_0(1 - \theta_0)$$

$$\left[\frac{d\{\text{Ln} R^\gamma\}}{d(\gamma V)}\right]_1^* = \frac{(\theta_0 + j)^2 + 2\theta_0(\theta_0 + j)\{dZ/d(\gamma V)\}_1^*}{(\theta_0 + j)^2 + 2\theta_0(\theta_0 - 1)\{dZ/d(\gamma V)\}_1^*} \quad (\text{III.66b})$$

Del mismo modo que se hizo en el caso general, para atravesar el punto singular del origen  $\{(\gamma V) = 0, Z = 0\}$  utilizaremos la variable  $(X/\gamma^2) = Z/(\gamma V)^2$  y para la integración desde el punto singular del infinito  $\{(\gamma V) = (\gamma V)_\infty, Z \rightarrow \infty\}$  seguiremos utilizando la variable  $\gamma = 1/Z$ . Las ecuaciones (III.9-10) escritas en estas variables se dan en el apéndice A.

El comportamiento asintótico en las proximidades del punto singular del infinito (ec. (III.31-32)) es:

$$Y = (j+3)(j+1)\{(\gamma V) - (\gamma V)_c\} / 2\theta_o(\theta_o - 1) \quad (\text{III.67a})$$

$$\ln(R^Y) = \ln(K_{RY}) - \theta_o \ln\{(\gamma V) - (\gamma V)_c\} \quad (\text{III.67b})$$

$$\ln \lambda = \ln(K_{\lambda Y}) + (1/2) \ln\{(\gamma V) - (\gamma V)_c\} \quad (\text{III.67c})$$

$$(\gamma V)_c = -2\theta_o / (j+1) \quad (\text{III.67d})$$

La ecuación (III.12) relaciona las constantes  $K_{\lambda Y}$  y  $K_{RY}$ , con la constante  $K_e$  de la ecuación algebraica, válida en el período explosivo

$$K_{\lambda Y}^{2(1-\theta_o)} = (j+3)(j+1)K_e K_{RY} / 2\theta_o(\theta_o - 1) \quad (\text{III.68})$$

Para tener definido por completo el problema, es necesario añadir las condiciones de salto (III.13-15) a través de la onda de choque reflejada. Estas condiciones de salto cuando  $\gamma$  se reducen a

$$(\gamma V)_2 = (\gamma V)_1 + 2(1 - Z_1) \quad (\text{III.69a})$$

$$Z_2 = 2 - Z_1 \quad (\text{III.69b})$$

$$\ln\{(R_2/R_1)^Y\} = 2(1 - Z_1) \quad (\text{III.69c})$$

Una vez que se tienen las ecuaciones (III.65a-b), apropiadas a este caso ( $\gamma \rightarrow \infty$ ), la solución se obtiene integrando numéricamente dichas ecuaciones en la forma indicada en el caso general.

### 5.3.1.- Trayectorias

Cuando  $\gamma \rightarrow \infty$  las trayectorias se calculan análogamente al caso general sin más que usar las variables apropiadas a es-

te caso. En primera aproximación ( $Y \rightarrow \infty$ ) el fluido se comporta como incompresible y las partículas fluidas no se mueven al paso de la onda de choque, por lo que para describir su evolución ha de utilizarse la variable  $(r_p/r_s)^\gamma$  en lugar de  $(r_p/r_s)$ . Según esto, las ecuaciones (III.43-44a), que determinan las trayectorias para cualquier  $\gamma$ , se reducen en este caso a

$$\frac{d\{\ln(r_p/r_s)^\gamma\}}{d(\gamma V)} = \frac{(\gamma V)(Z-1)}{Z\{(j+1)(\gamma V)+2\theta_0\}+(\gamma V)(\theta_0-1)} \quad (\text{III.70a})$$

$$\{(t/t_s)/(\gamma V)\} = Z/\{(\gamma V)^2 R^\gamma K\} \quad (\text{III.70b})$$

Para obtener las trayectorias detrás de la onda de choque explosiva hay que utilizar la variable  $Y=1/Z$  en (III.70a) y añadir el comportamiento asintótico de esta ecuación en las proximidades del punto singular del infinito  $\{(\gamma V) = (\gamma V) Z \rightarrow \infty\}$ ; este es:

$$\ln\{(r_p/r_s)^\gamma\} = \ln(K_{r^\gamma}) + \{\theta_0/(j+1)\} \ln\{(\gamma V) - (\gamma V)_c\} \quad (\text{III.71})$$

### 5.3.2. Resultados

De la integración numérica de las ecuaciones anteriores se obtienen los valores de  $Z\{(\gamma V)\}$ ,  $R^\gamma\{(\gamma V)\}$  y  $\lambda\{(\gamma V)\}$  que determinan el campo fluido durante los procesos implosivo y explosivo. También se obtienen los parámetros más característicos que determinan el problema. Estos parámetros se dan en la tabla III.3 para  $\gamma$  y son análogos a los dados en la tabla III.2 para varios valores de  $\gamma$ .

$\gamma \rightarrow \infty$	SIMETRIA CILINDRICA (j=1)	SIMETRIA ESFERICA (j=2)
$\alpha_o$	0.727048	0.588289
$M_\infty$	0.63069/ $\gamma$	0.24639/ $\gamma$
$\rho_\infty/\rho_s$	$(1.32156)^{1/\gamma}$	$(1.19182)^{1/\gamma}$
$\pi_\infty$	1.32156	1.19182
$r_r/r_s$	1.87573	1.50989
$t_r/ t_s $	0.420994	0.496388
$\rho_r/\rho_s$	$(3.60947)^{1/\gamma}$	$(2.36580)^{1/\gamma}$
$\pi_r$	2.29658	1.33338
$K_e$	0.276178	0.271570
$K_R$	$(34.0822\gamma^{0.375425})^{1/\gamma}$	$(11.854\gamma^{0.699844})^{1/\gamma}$
$K_\lambda$	$4.75531\sqrt{\gamma}$	$2.42418\sqrt{\gamma}$
$p(r=0)/p_s$	1.45948	0.466037

Tabla III.3.- Valores de los parámetros más característicos del proceso implosivo y explosivo.  $\gamma \rightarrow \infty$ . Simetría cilíndrica (j=1) y esférica (j=2).

Las constantes  $K_r$  y  $K_\lambda$  están relacionadas con  $K_{R\gamma}$  y  $K_{R\gamma}$  en la forma:

$$K_R = \{K_{R\gamma} \gamma^{-\theta_o}\}^{1/\gamma} \quad (\text{III.72a})$$

$$K_\lambda = K_{\lambda\gamma} \sqrt{\gamma} \quad (\text{III.72b})$$

En las Figs. III.17-19 se han representado las distribuciones temporales (para radio fijo) y radiales de velocidad, presión y densidad en dos instantes (anterior y posterior a la reflexión de la onda). Estas distribuciones están dadas por:

a) Radio fijo,  $r = r_s \neq 0$

$$|u/u_s| = \lambda^{1/\alpha_o} |\gamma v|/2 \quad (\text{III.73a})$$

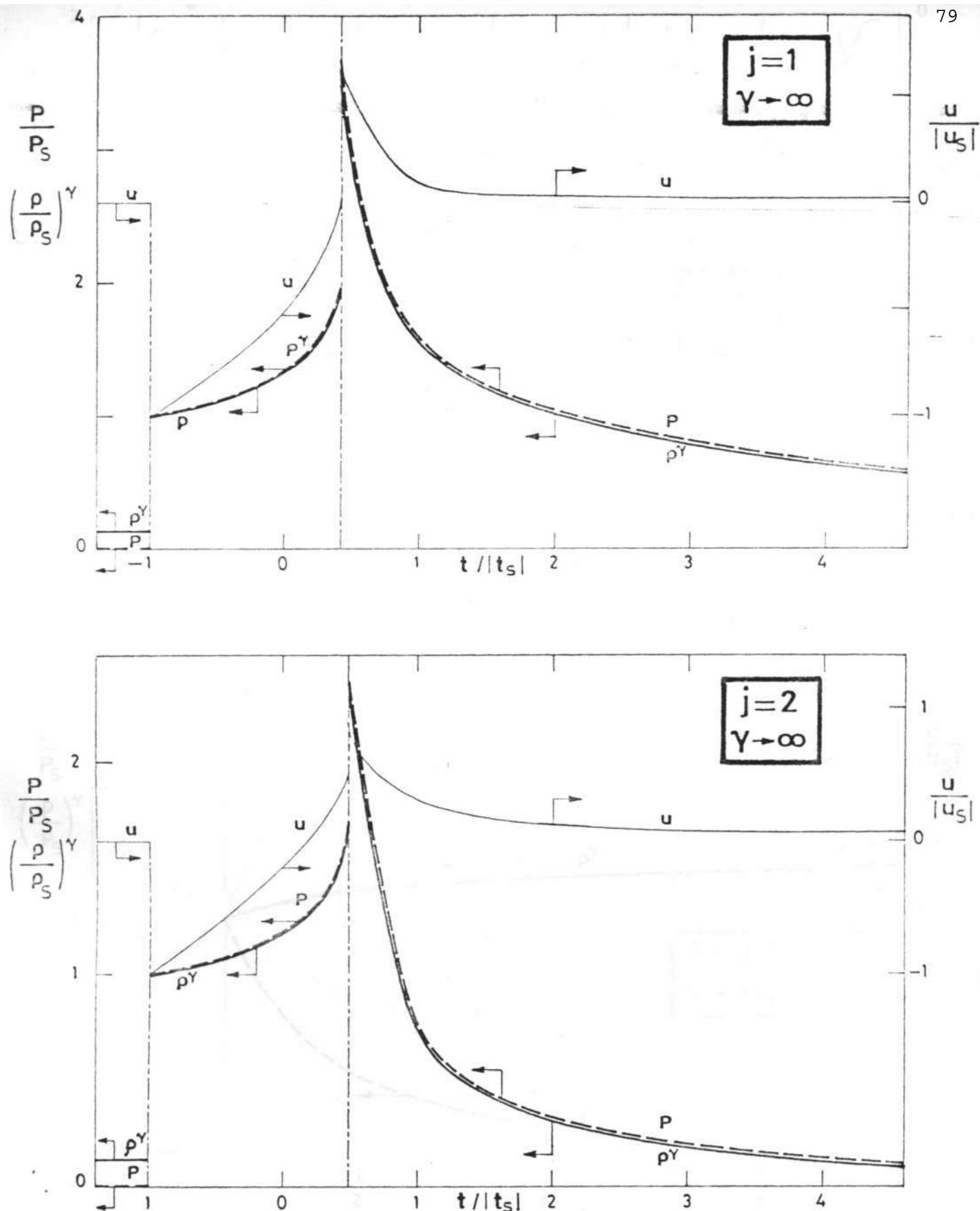
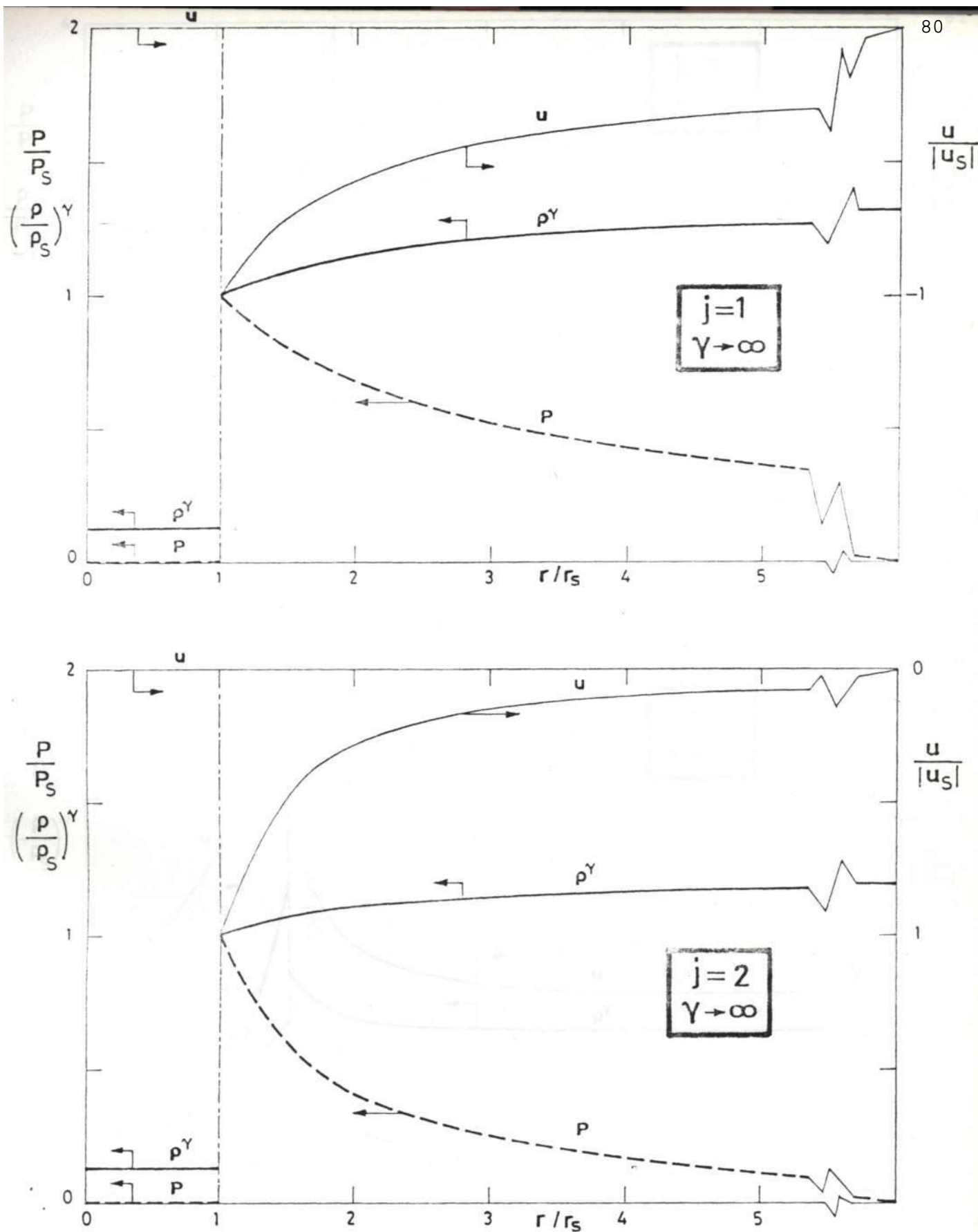


Fig. III.17.- Distribuciones de velocidad,  $u$ , presión,  $p$ , y densidad,  $\rho^\gamma$ , observadas en un radio fijo  $r = r_s$ , como función del tiempo.



Flg. III.18.- Distribuciones de velocidad,  $u$ , presión,  $p$ , y densidad,  $\rho^\gamma$ , observadas a lo largo del radio en un instante ( $t < 0$ ) anterior a la reflexión de la onda de choque en el centro (eje) de simetría.

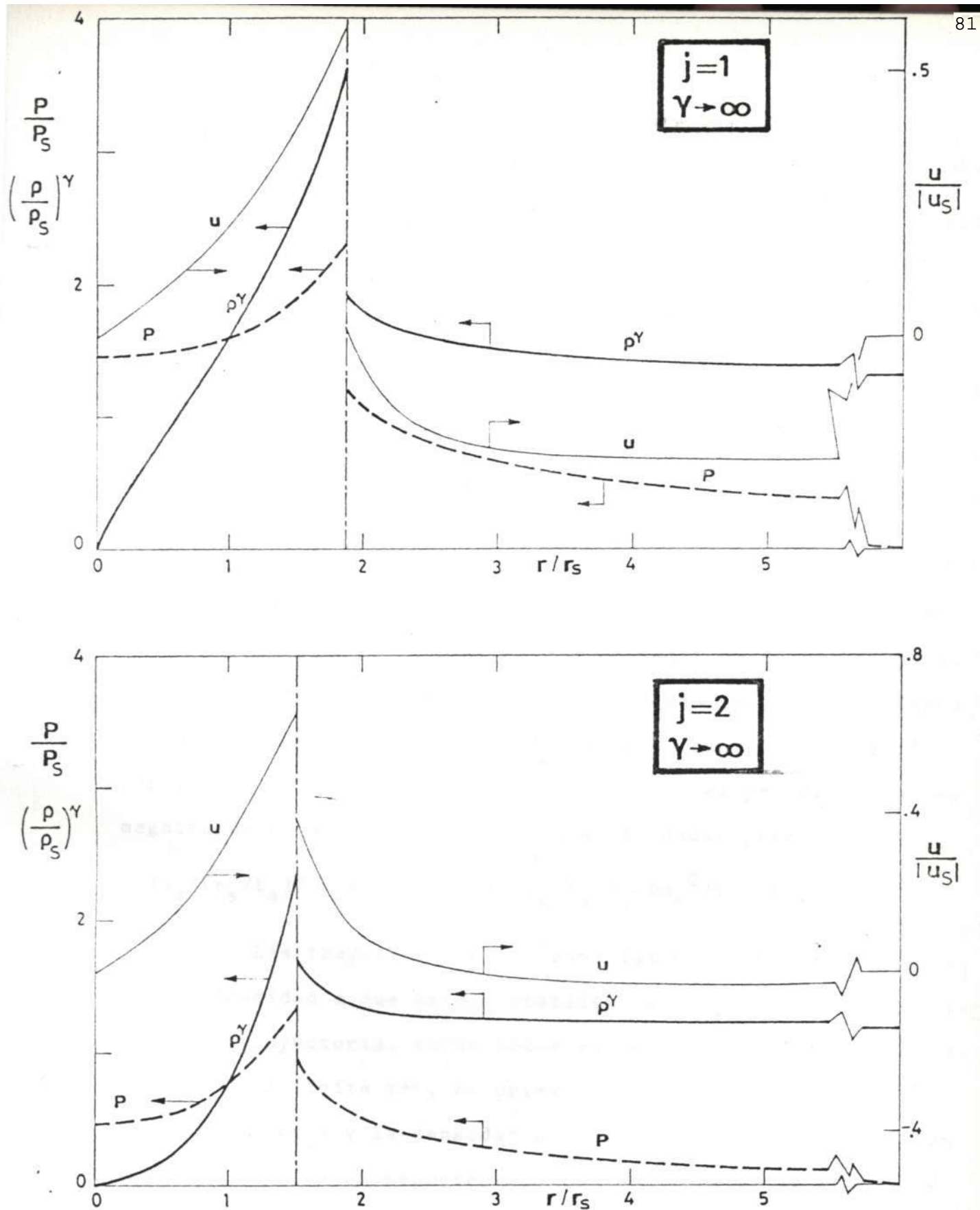


Fig. III.19.- Distribuciones de velocidad,  $u$ , presión,  $p$ , y densidad,  $\rho^\gamma$ , observadas a lo largo del radio en un instante ( $t > 0$ ) posterior a la reflexión de la onda de choque en el centro (eje) de simetría.

$$p/p_s = \lambda^{2/\alpha_0} Z/2 \quad (\text{III.73b})$$

$$(\rho/\rho_s)^\gamma = e^{-2R\gamma} \quad (\text{III.73c})$$

$$|t/t_s| \lambda^{-1/\alpha_0}$$

b) Tiempo fijo,  $t=t_s \neq 0$

$$|u/u_s| = |\gamma V| \lambda/2 \quad (\text{III.74a})$$

$$p/p_s = Z \lambda^2/2 \quad (\text{III.74b})$$

$$(\rho/\rho_s)^\gamma = e^{-2R\gamma} \quad (\text{III.74c})$$

$$r/r_s = \lambda \quad (\text{III.74d})$$

En ambos casos, a) y b),  $r$  y  $t$  están relacionados de la forma:  $r = |ct|^\alpha$ . El tiempo es negativo cuando  $\lambda$  crece,  $t=0$  cuando  $\lambda \rightarrow \infty$  y  $t>0$  cuando  $\lambda$  decrece desde  $+\infty$ . La velocidad  $u$  es negativa cuando está dirigida hacia el centro de simetría, por lo que su signo coincide con el signo del producto  $tV$ . Las magnitudes de adimensionalización están dadas por:

$$|u_s/(r_s/t_s)| = 2\alpha_0/\gamma; \quad p_s/\rho_0 (r_s/t_s)^2 = 2\alpha_0^2/\gamma; \quad (\rho_s/\rho_0)^\gamma = e^2 \quad (\text{III.75})$$

Las trayectorias, así como las distribuciones de presión y densidad a que están sometidas las capas fluidas a lo largo de su trayectoria, están dadas en las Figs. III.20-21. Nótese que en el límite  $\gamma \rightarrow \infty$  en primera aproximación el fluido no se mueve ( $r_p = r_s$ ) y la densidad no cambia ( $\rho = \rho_0$ ), por lo que en estas figuras se ha representado  $r_p^\gamma$  y  $\rho^\gamma$  que es lo que sufre variaciones de orden unidad al paso de la onda de choque. En las Figs. 17 y 20 puede observarse que  $(p/p_s) = (\rho/\rho_s)^\gamma$  antes de alcanzar a la onda de choque reflejada ( $t = t_r$ ) cambiando esta igualdad a  $(p/p_s) = k(\rho/\rho_s)^\gamma$  cuando  $t > t_r$ . Esto representa la conservación



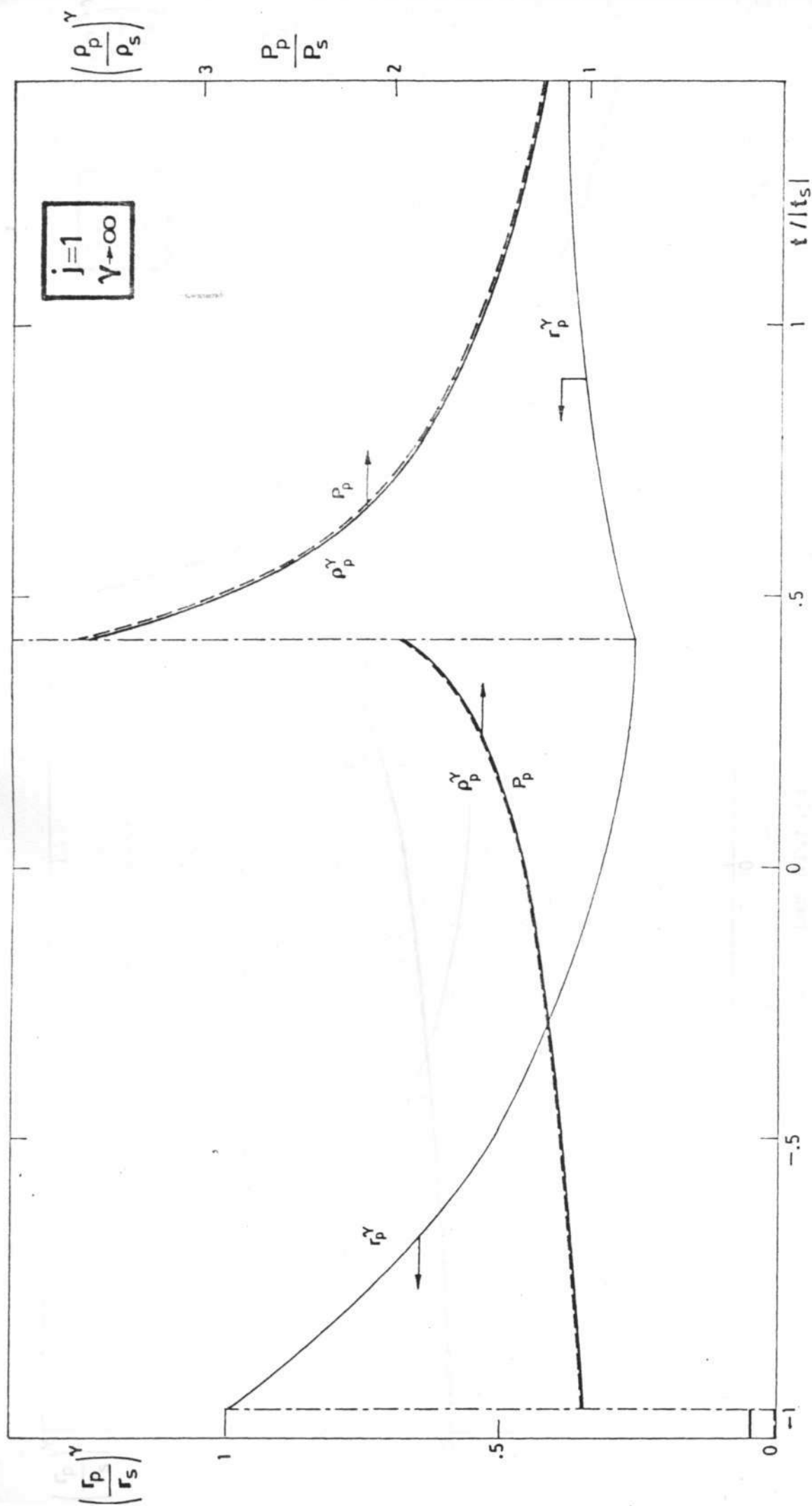


Fig. III.20.- Evolución de los radios de las distintas capas fluidas,  $r_p^\gamma$ ,  $\rho_p^\gamma$  y distribuciones de presión,  $P_p$  y densidad,  $\rho_p^\gamma$ , a que están sometidas dichas capas fluidas como función del tiempo. Simetría cilíndrica.

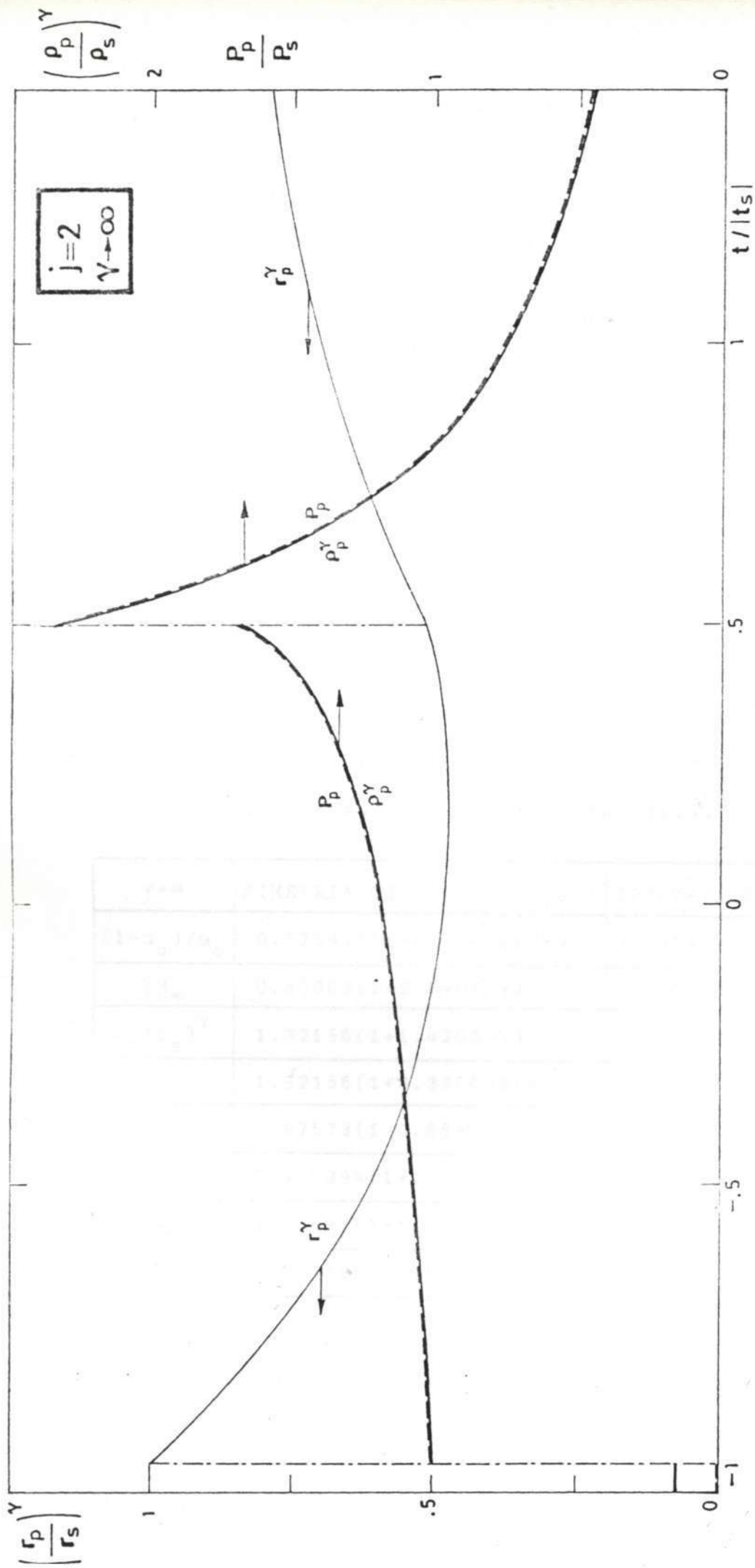


Fig. III.21.- Evolución de los radios de las distintas capas fluidas,  $r_p^\gamma$ , y distribuciones de presión,  $P_p$  y densidad,  $\rho_p^\gamma$ , a que están sometidas dichas capas fluidas como función del tiempo. Simetría esférica.

de la entropía de la partícula a lo largo de su trayectoria hasta que es alcanzada por la onda de choque reflejada, donde la entropía sufre un incremento a un nuevo valor constante.

En las Figs. III. 6, 8, 9, 10 y 11 se han representado los valores de  $\alpha_0$ ,  $\rho_{\infty}/\rho_s$ ,  $\rho_r/\rho_s$ ,  $\Pi_{\infty}$  y  $\Pi_r$  como función de  $\gamma$ , obtenidos de la solución numérica de (III.9-11). Como comparación se representan también los mismos valores obtenidos mediante la solución asintótica  $\gamma \rightarrow \infty$ . Para obtener estas distribuciones es necesario retener términos del orden  $1/\gamma$  en las ecuaciones originales (III.9-12) y realizar la integración simultánea de las ecuaciones que describen los términos de orden unidad (descritas en este apartado) y las que describen los términos de orden  $1/\gamma$ . No vamos a detenernos en los detalles de estas integraciones numéricas, pero sí presentaremos los resultados obtenidos de ellas, que están resumidos en la tabla III.4.

$\gamma \rightarrow \infty$	SIMETRIA CILINDRICA (j=1)	SIMETRIA ESFERICA (j=2)
$(1-\alpha_0)/\alpha_0$	$0.375425(1-0.750318/\gamma)$	$0.699844(1-0.498242/\gamma)$
$\gamma M_{\infty}$	$0.63069(1+2.0498/\gamma)$	$0.24639(1+5.95/\gamma)$
$(\rho_{\infty}/\rho_s)^{\gamma}$	$1.32156(1+1.4203/\gamma)$	$1.19182(1+2.6268/\gamma)$
$\pi_{\infty}$	$1.32156(1+0.396098/\gamma)$	$1.19182(1+0.461706/\gamma)$
$r_r/r_s$	$1.87573(1-0.858767/\gamma)$	$1.50989(1+0.133011/\gamma)$
$t_r/ t_s $	$0.420994(1+1.42263/\gamma)$	$0.496387(1-0.082457/\gamma)$
$(\rho_r/\rho_s)^{\gamma}$	$3.60947(1+1.84727/\gamma)$	$2.3658(1+4.39643/\gamma)$
$\pi_r$	$2.29658(1+2.11494/\gamma)$	$1.33338(1+3.63993/\gamma)$

Tabla III.4.- Valores de algunos parámetros característicos del proceso implosivo y explosivo obtenidos hasta términos del orden de  $1/\gamma$  con la solución asintótica  $\gamma \rightarrow \infty$ . Simetría cilíndrica (j=1) y esférica (j=2).

#### IV. COMPRESIÓN SIMÉTRICA E ISENTROPICA

#### IV.1. INTRODUCCIÓN

En la compresión de un material mediante onda de choque implosiva, visto en el capítulo III, solamente se consiguen densidades altas cuando la relación de calores específicos  $\gamma$  es muy próximo a la unidad; cuando  $\gamma$  aumenta, la densidad máxima decrece rápidamente (ver Fig. III.9). En particular, cuando  $\gamma = 5/3$  ( $j=2$ ), valor asintótico de  $\gamma$  en materiales a altas presiones y temperaturas (Zel'dovich, Ya.3. y Raizer, Yu.P. ; 1967), la densidad máxima es 32 veces la inicial. Con estos valores de la densidad máxima, que decrece rápidamente al acercarse al origen ( $r=0$ ), la onda de choque no es capaz de dar lugar a la fusión nuclear (Brueckner, K.A. y Joma, Sv; 1974). Densidades mucho más altas que las obtenidas con la compresión mediante onda de choque, se consiguen mediante una compresión isentrópica de la bola (sin ondas de choque), al menos durante todo el proceso implosivo.

En el capítulo II hemos visto la posibilidad de conseguir densidades tan altas como se deseen mediante la compresión simétrica e isentrópica de una placa, a partir de condiciones iniciales de densidad uniforme y velocidad nula, si la ley temporal de presiones en la superficie exterior es tal que todas las ondas de compresión se alcanzan en el plano de simetría en el instante  $t=0$  (onda centrada). Si se mantiene esta ley de presiones hasta  $t=0$  se consiguen densidades infinitas, pero a costa de presiones infinitas. Si se interrumpe la ley de crecimiento de la presión exterior en un instante  $t < 0$ , la densidad máxima es tanto más alta cuanto más próximo a cero sea  $t_A$  (ver Fig. II.2a).

En el caso en que exista simetría cilíndrica o esférica puede obtenerse una solución de semejanza, correspondiente a la compresión isentrópica a partir de condiciones iniciales de densidad uniforme y velocidad nula, análoga a la del caso plano citada anteriormente. Esta solución autosemejante corresponde al caso en que  $\alpha=1$  y  $C = C_0$  (ec. (III.7)), (Courant, R. y Friedrichs, K.O.; 1943), (Sedov, L.I.; 1959), (Ferro Fontan, C. y otros; 1975). Este tipo de solución autosemejante puede describirse mediante la trayectoria asociada en el plano de las fases  $(V, Z)$ , alcanzándose densidades infinitas cuando la curva correspondiera a la solución, que arranca del punto singular  $(V^*, Z^*)$ , pasa por el punto singular  $(V_3, Z_3)$  dado en (III.22). La densidad es tanto más alta cuanto más próximo a  $(V_3, Z_3)$  pase dicha trayectoria. En este capítulo se describe este tipo de soluciones haciendo uso de la técnica de perturbaciones singulares (Cole, J.D.; 1968), dando la solución analítica en las proximidades de  $(V_3, Z_3)$  y acoplando esta solución con la numérica que pasa por dicho punto. A continuación se obtiene la ley temporal de presiones en la superficie exterior. Se obtiene también la solución analítica correspondiente al caso plano ( $j=0$ ) que coincide con la dada en el apartado II.4 (caso de gas perfecto).

#### IV.2. ECUACIONES

Las ecuaciones que describen el proceso de compresión simétrico e isentrópico de una esfera (cilindro) son las dadas en (III.1-3). La ecuación de la energía (III.3) puede sustituirse por:

$$c/\rho^{(\gamma-1)} = c_0/\rho_0^{(\gamma-1)} \quad (IV.1)$$

donde  $\rho_0$  y  $c_0$  son la densidad y velocidad del sonido iniciales, La ecuación (IV.1) expresa la conservación de la entropía en el supuesto de que el fluido se comporte como un gas perfecto. Si hay una etapa previa en que el fluido no pueda considerarse como un gas perfecto, el análisis sigue siendo aplicable si, por ejemplo, la esfera ha sido sometida previamente a un proceso de compresión homogénea e isentrópica en tiempos grandes frente al de propagación del sonido en la bola. Si se conocen las ecuaciones de estado del material, se puede calcular la constante del segundo miembro de (IV.1) así como  $\rho$  en función de la entropía inicial y la precompresión  $p_0$  a que se somete la bola.

Cuando se buscan soluciones autosemejantes de la forma (III.4-7) y el frente de onda se propaga con velocidad  $c$  hacia el centro de simetría, la variable de semejanza (III.7) toma la forma:

$$\lambda = r / |c_0 t| \quad (IV.2)$$

correspondiente a  $\alpha=1$  y  $C=c_0$ . Puesto que las condiciones iniciales y de contorno determinan  $\alpha$  y  $C$ , la solución autosemejante es de las llamadas de primera clase (Barenblatt, G.I. y Zel'dovich, Ya.B. ; 1972).

En el frente que converge hacia el origen con velocidad  $c$ , la variable  $\lambda$  es la unidad. En el interior del frente  $\rho=\rho_0$ ,  $c=c_0$  y  $u=0$ , por lo tanto  $R=1$ ,  $Z=1$  y  $V=0$ . El punto ( $V_1^*=0$ ,  $Z_1^*=1$ ) del plano de las fases ( $V,Z$ ), punto inicial de integración, es punto singular del sistema de ecuaciones (III.19), representando el estado del fluido al ser alcanzado por el frente de compresión. Está, al igual que el punto singular ( $V_2^*=1$ ,  $Z_2^*=0$ ), sobre la curva de las características  $Z=(1-V)^2$ . El pun-

to singular  $(V_3, Z_3)$ , dado por

$$V_3 = 2/\{j(Y-1)+Y+1\} \quad (\text{IV.3a})$$

$$Z_3 = (j+1)(Y-1)^2/\{j(Y-1)+Y+1\}^2, \quad (\text{IV.3b})$$

está por debajo de la característica puesto que  $Z < (1-V_3)^2$ . La configuración de estos tres puntos se puede deducir de la Fig. III.3 con  $\theta=0$  ( $\alpha=1$ ), donde  $(V^*, Z^*)$  son nodos y  $(V_3, Z_3)$  es un puerto.

Las ecuaciones (III.1-2) y (IV.1) escritas con las variables de semejanza (III.4-6) y (IV.2) se transforman en el sistema de ecuaciones diferenciales (III.19) ó (III.9-11) y en la ecuación algébrica (III.12), que sustituye a una de las ecuaciones diferenciales, con  $\theta=0$  ( $\alpha=1$ ). Estas ecuaciones han de integrarse desde  $V=0$ ,  $Z=1$ ,  $R=1$  y  $\lambda=1$  hacia  $(V=0, Z=0)$ , que representa el estado del fluido en  $t=0$ , y continuar la integración hacia  $V<0$  hasta el punto  $(V_1, Z_1)$  que representa el estado del fluido delante de la onda de choque, originada por la reflexión de las ondas de compresión en el centro de simetría. Mediante las condiciones de salto a través de la onda de choque (III.13-15), el punto  $(V_1, Z_1)$  se transforma en el punto  $(V_2, Z_2)$  representativo del estado del fluido detrás de la onda de choque. El estado del fluido en la zona interior a la onda de choque está descrito por las mismas ecuaciones (III.9-11) arrancando del punto singular del infinito ( $V=V, Z \rightarrow \infty$ ). Cuando  $\alpha=1$  es  $V=0$  y la solución de (III.9-11) se reduce a

$$V=0; \quad R=R_2; \quad (\lambda/\lambda_r)^2 = Z_2/Z \quad (\text{IV.4})$$

donde las magnitudes con subíndice 2 indican su valor detrás de



la onda de choque.  $\lambda_r$  es el valor de  $\lambda$  en la onda. La solución (IV.4) nos indica que el fluido alcanzado por la onda de choque queda en reposo detrás de ella con densidad y presión constante.

Puesto que el estado del fluido en el interior de la onda de choque queda en reposo, el estado del fluido delante ( $V_1, Z_1$ ) es un punto de la parábola (véase Fig. III.1)

$$Z_1 = (1 - V_1) \{1 + (\gamma - 1) V_1 / 2\} \quad . \quad (IV.5)$$

las trayectorias están dadas por la ecuación algébrica (III.43) y la ecuación diferencial (III.44a) con  $\theta = 0$ . Detrás de la onda de choque, al ser  $V = 0$ , esta ecuación puede integrarse para dar

$$r_p / r_i = K_r \quad , \quad (IV.6)$$

donde la constante  $K_r$  se obtiene de la continuidad de  $r_p$  a uno y otro lado de la onda.

El punto singular ( $V_3, Z_3$ ), que no determina el carácter de la solución cuando la compresión se realiza mediante onda de choque implosiva, juega un papel esencial en la compresión isentrópica, en el sentido de que la densidad conseguida es tanto más alta cuanto más cerca pase la solución  $Z = Z(V)$  de este punto. A continuación vamos a presentar la solución para el caso plano ( $j = 0$ ), que ya había sido obtenida por otro procedimiento en el apartado II.4.

#### IV.3. COMPRESIÓN ISENTRÓPICA PLANA

En el caso plano ( $j = 0$ ) las ecuaciones (III.19) admiten la solución:

$$Z = (V / M_\infty)^2 \quad ; \quad \lambda |V| = T \quad , \quad (IV.7)$$

correspondiente a una corriente uniforme de presión y densidad constante, además de la solución

$$Z-(1-V)^2 = 0 ; \quad \lambda V = 2(\lambda-1)/(\gamma+1) \quad (\text{IV.8})$$

correspondiente a una onda simple que satisface las condiciones iniciales  $Z-1=V=0$  para  $\lambda=1$ . La solución (IV.8) no se obtiene directamente de (III.9-11) con  $\theta = j = 0$ , porque para obtener (III.9-11) de (III.19) se han dividido los numeradores y denominadores de ellas por el factor  $Z-(1-V)^2$ , nulo cuando  $\theta = j = 0$ .

Una solución particular, que presenta una discontinuidad débil, se obtiene utilizando (IV.8) en un intervalo  $\lambda \in \{1, \lambda_m\}$  y empalmado esta solución con otra de la forma (IV.7). Nótese que  $Z=(1-V)^2$  expresa la condición de que la superficie  $\lambda$  constante, en el plano  $(r, t)$ , es una superficie característica. Por ello en  $\lambda = \lambda_m$  puede haber una discontinuidad en las derivadas. La continuidad de (IV.7-8) en  $\lambda = \lambda_m$  implica

$$M_\infty = V_m / (1 - V_m) \quad (\text{IV.9a})$$

$$T = 2(\lambda_m - 1) / (\gamma + 1) \quad (\text{IV.9b})$$

$$V_m = 2(\lambda_m - 1) / \lambda_m (\gamma + 1) = T / \lambda_m \quad (\text{IV.9c})$$

En ambas soluciones (IV.7-8) la densidad está dada por la ecuación algébrica (III.12) con  $\theta = 0$  y  $K = K_i = 1$

$$R = (\lambda^2 Z)^{1/(\gamma-1)} \quad (\text{IV.10})$$

La intersección de (IV.7)  $Z = (V_1/M_{00})^2$  con la parábola  $Z = (1-V_1)\{1 + (\gamma-1)V_1/2\}$  determina el punto  $(V_1, Z_1)$  que representa el estado del fluido delante de la onda de choque, obteniéndose:

$$\{(\gamma-1)/2+(1-v_m)^2/v_m^2\}v_1^2-\{(\gamma-3)/2\}v_1-1=0 \quad (\text{IV.11a})$$

$$Z_1 = \{(1-v_m)v_1/v_m\}^2 \quad (\text{IV.11b})$$

y los valores respectivos de X y R son:

$$\lambda_r = 2(\lambda_m-1)/(\gamma+1)(-v_1) \quad (\text{IV.11c})$$

$$R_1 = (\lambda_r^2 Z_1)^{1/(\gamma-1)} \quad (\text{IV.11d})$$

en la ecuación (IV.11a) hay que elegir la raíz negativa.

Conocidas las condiciones delante de la onda de choque, las condiciones detrás están dadas por (III.13-15) que nos determinan  $V=0$ ,  $R=(1-V)R_1$  y  $Z_2(V_1, Z_1)$ . La solución en el interior de la onda está dada en (IV.4),

Las trayectorias correspondientes a la solución (IV.8) están dadas por:

$$r_p/r_i = \{(\gamma+1)/(\gamma-1)\}(t/t_i)\{(t/t_i)^{-(\gamma-1)/(\gamma+1)} - 2/(\gamma+1)\} \quad (\text{IV.12})$$

y las correspondientes a (IV.7) son:

$$r_p/r_i = Q + T(t/t_i) \quad (\text{IV.13})$$

donde  $t_i$  y  $r_i$  son el instante y radio iniciales,  $r_i = -c_0 t_i$ . La constante Q se obtiene de la continuidad de (IV.12-13) en  $\lambda = \lambda_m$  donde  $(r_m/r_i) = \lambda_m(t_m/t_i)$ . Puede observarse que (IV.12) coincide con la expresión dada, para el caso de un gas perfecto, en el apartado 11.4.

Detrás de la onda de choque las trayectorias están dadas por (IV.6),  $(r_p/r_i) = K_r$ , donde la constante  $K_r$  se obtiene de la continuidad de (IV.13) y (IV.6) en  $\lambda = \lambda_r$  donde  $(r_r/r_i) = -\lambda_r(t_r/t_i)$ .

El punto singular  $(V_3, Z_3)$  dado en (IV.3) está situado

sobre la característica cuando  $j=0$ , ya que al ser

$$V_3 = 2/(Y+1) ; \quad Z_3 = \{(Y-1)/(Y+1)\}^2 \quad (\text{IV.14})$$

se cumple  $Z = (1-V_3)^2$ . Este punto pierde el carácter de singularidad que tiene cuando  $j \neq 0$ ; sin embargo, si la solución (IV.8) se prolonga hasta valores  $V_m$ , la densidad tiende a infinito en la forma  $(V_m - V)^{-1/(Y-1)}$  y la temperatura como  $(V_m - V)^{-Y/(Y-1)}$ ; mientras que el radio de la capa fluida tiende a cero como  $(V_m - V)^{2/(Y-1)}$  en tiempos del orden de  $(V_m - V)^{1/(Y-1)}$ . Esto nos indica que prácticamente todo el proceso implosivo se realiza mientras es válida la solución (IV.8) (si  $V \rightarrow V_m$ ).

En la Fig. IV.1a se ha representado la solución  $Z(V)$ , en el plano de las fases, correspondiente al caso plano y  $Y=5/3$  para distintos valores de  $M_{\infty}$  (relacionado con  $X_m$  y  $V_m$  mediante (IV.19)). Cuando  $M_{\infty} = 2/(Y-1)$  es  $V = V_0$  y por lo tanto la densidad alcanzada es infinita. Esta curva es la correspondiente a  $M = 3$  en la figura.

Las trayectorias correspondientes a  $M_{Q0}=1/2$  se han representado en la Fig. IV.2 ( $Y=5/3$ ,  $j=0$ ), donde también se indican los perfiles de densidad en dos instantes anterior y posterior a la reflexión de las ondas de compresión en el plano de simetría.

#### IV. M. COMPRESIÓN ISENTROPICA CON SIMETRÍA CILÍNDRICA ( $j=1$ ) Y ESFÉRICA ( $j=2$ )

Hemos visto en el apartado anterior que la solución correspondiente al caso plano tiene un grado de libertad dado por el valor de  $X$ , o sus equivalentes  $V$  ó  $M$ , donde se trunca

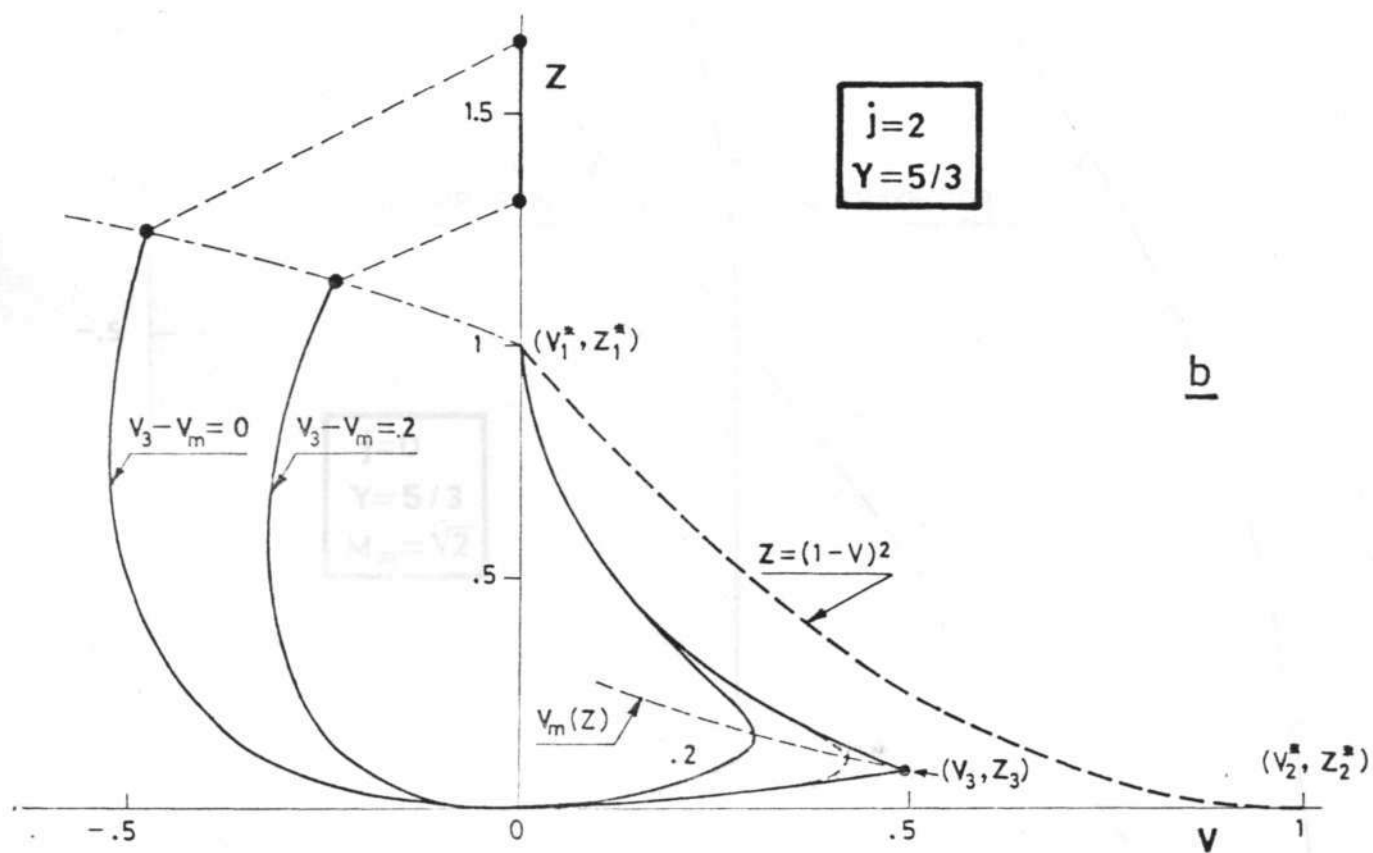
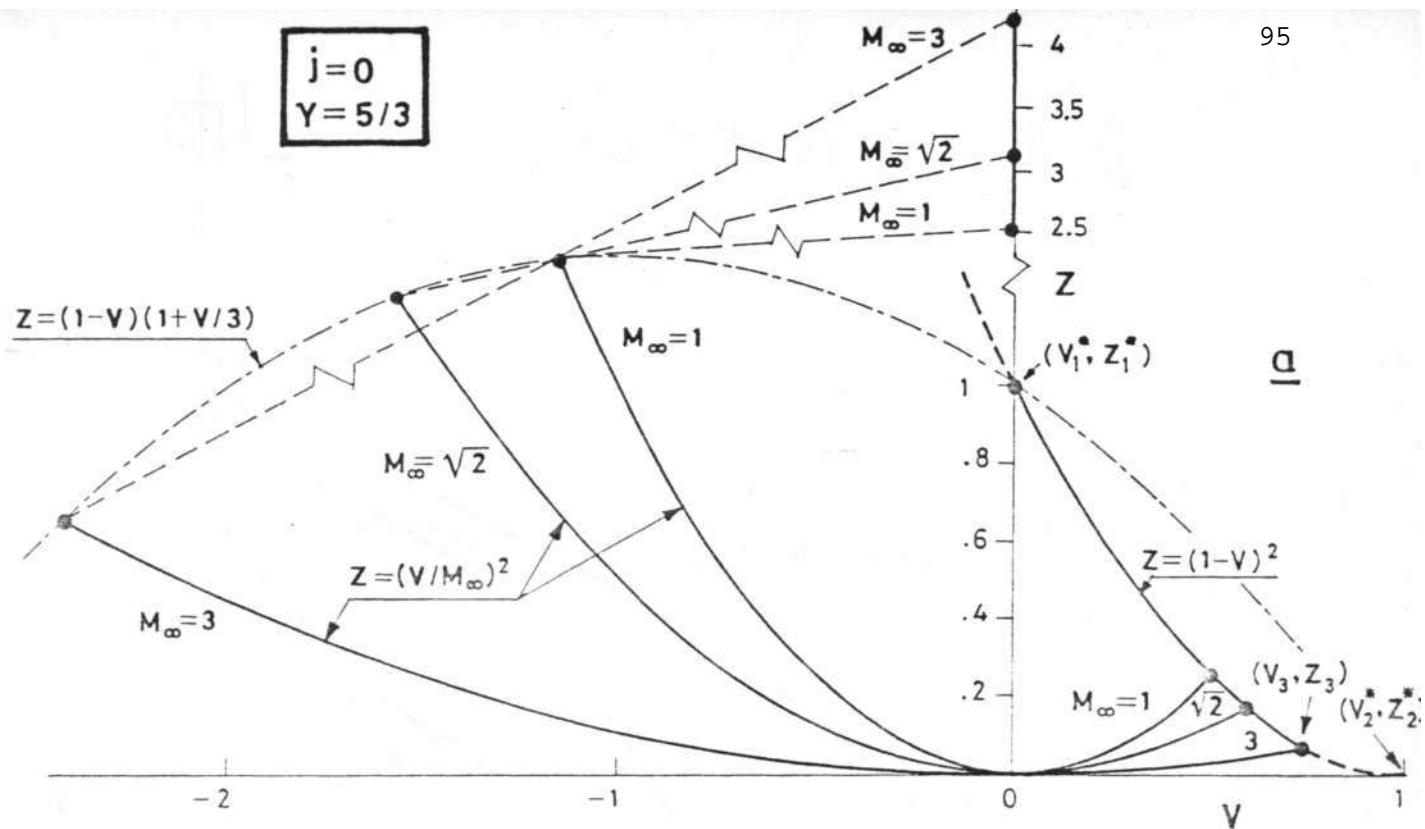
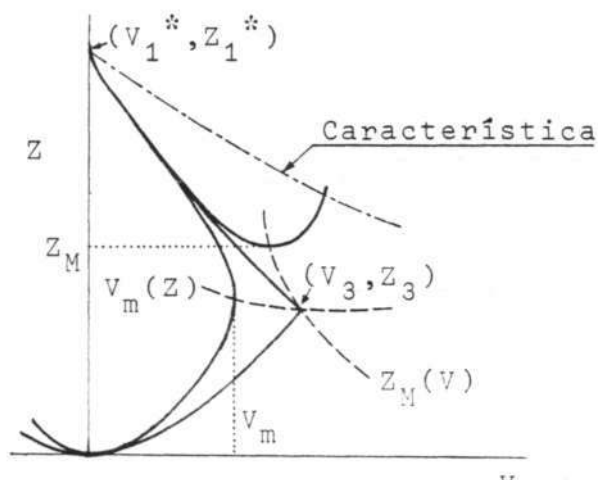


Fig. IV.1.- Solución en el plano de las fases  $(V, Z)$  de la compresión isentrópica,  $\gamma = 5/3$ . a) simetría plana, b) simetría esférica.

la solución (IV.8). Este grado de libertad se traduce en que podemos fijar la densidad máxima que se desea alcanzar. Sin embargo, esta densidad máxima nos obliga a imponer una ley de presiones muy particular en la superficie exterior, variable hasta el instante correspondiente a  $V_m$  y constante después.

En los casos con simetría cilíndrica ( $j=1$ ) y esférica ( $j=2$ ), aparece el mismo grado de libertad, asociado a las infinitas formas de salir del nodo  $(V_1^*, Z_1^*)$  representativo del punto inicial de integración en el plano de las fases.

Dependiendo de la forma en que se sale de  $(V_1^*, Z_1^*)$ , la curva integral de (III.9) puede cortar a la curva que anula



su denominador  $V_m(Z)$  (ver figura adjunta), puede pasar por el punto singular  $(V_3, Z_3)$  o cortar a la curva que anula el numerador  $Z_M(V)$ . Si la curva integral corta a  $V_m(Z)$ , la  $V$  toma su valor máximo en  $V_m < V_3$  alejando posteriormente el punto

$(V=0, Z=0)$ . Si pasa por  $(V_3, Z_3)$  se obtiene densidad infinita en este punto. Por último, si corta a  $Z_M(V)$  la  $Z$  es mínima en  $Z_M(V)$ , y posteriormente la curva integral de (III.9) corta a la característica obteniéndose soluciones múltiples de las variables físicas para un mismo instante. Por lo tanto, una solución física del problema de la compresión isentrópica ha de ser tal que la curva integral de (III.9) corte a  $V_m(Z)$  y por lo tanto  $V_m < V_3$ . En la Fig. IV.1b se han representado las curvas integrales de

(III.9) correspondientes a  $V_3 - V_m = 0$  y  $0.2$ ,  $\gamma = 5/3$  y  $j = 2$ .

En este apartado vamos a obtener la solución asintótica para valores pequeños de  $(V_3, V_m)$  frente a  $V_3$ , que implica obtener densidades finales altas. Esta solución asintótica está determinada, para valores de  $(V, Z)$  no próximos a  $(V_3, Z_3)$ , por las dos ramas de la solución límite que pasa por  $(V_3, Z_3)$ , que han de obtenerse numéricamente, y Dará valores de  $(V, Z)$  próximos a  $(V_3, Z_3)$  por una solución analítica para cada valor de  $(V_3 - V_m)$ , en la que intervienen otras constantes de integración que han de obtenerse por acoplamiento con las soluciones numéricas anteriores.

En lo que sigue nos limitaremos al caso  $\gamma = 5/3$ , en cuyo caso las ecuaciones se reducen a

$$\frac{dZ}{dV} = \frac{Z}{3V} \frac{6\{Z-(1-V)^2\} + 2jV(1-V)}{(j+1)Z-(1-V)^2} \quad (\text{IV.15a})$$

$$\frac{d(\text{Ln}R)}{dV} = \frac{j(1-V)}{(j+1)Z-(1-V)^2} \quad (\text{IV.15b})$$

$$Z\lambda^2 = R^{2/3} \quad (\text{IV.15c})$$

$$\frac{d(\text{Ln}r_p)}{dV} = \frac{Z-(1-V)^2}{(1-V)\{(j+1)Z-(1-V)^2\}} \quad (\text{IV.15d})$$

$$(t/t_i)^2 = \{(r_p/r_i)/\lambda\}^2 \quad (\text{IV.15e})$$

Para obtener las dos ramas de la solución límite que alcanza a  $(V_3, Z_3)$ , ha de integrarse numéricamente el sistema de ecuaciones anterior, tomando como condiciones iniciales valores dados por su forma asintótica para valores pequeños de  $(V-V_3)$

$$Z-Z_3 = \alpha_{1,2}(V-V_3) \quad (\text{IV.16a})$$

$$\ln(R/R_0) = \{\ln|V-V_3|\}/\mu_{1,2} \quad (\text{IV.16b})$$

$$\ln(r_p/r_0) = -\{\ln|V-V_3|\}/(j+1)\mu_{1,2} \quad (\text{IV.16c})$$

de las ramas límite, donde

$$V_3 = 3/(j+4) ; \quad Z_3 = (j+1)/(j+4)^2 \quad (\text{IV.17a})$$

$$\alpha_{1,2} = -2\{1 \pm \sqrt{(j^2+4j+8)/2}\}/3(j+4) \quad (\text{IV.17b})$$

$$\mu_{1,2} = 4\{1 \pm \sqrt{(j^2+4j+8)/8}\}/3j . \quad (\text{IV.17c})$$

El subíndice 1 corresponde al signo superior de la raíz cuadrada y el 2 al inferior. Cuando la integración numérica se realiza desde  $(V_3, Z_3)$  al punto  $(0,1)$  (rama límite superior) hay que elegir  $\alpha_2$  y  $\mu_2$  en (IV.16) y cuando se realiza hacia  $(0,0)$  (rama límite inferior) hay que tomar  $\alpha_1$  y  $\mu_1$ . En (IV.16) intervienen además las constantes  $\ln(R_0)$  y  $\ln(r_0/r_i)$ , cuyos valores afectan aditivamente a las soluciones numéricas; cuando se calcula la rama límite superior se determinan exigiendo que en  $(0,1)$  sea  $R=(r_p/r_i)=1$ , cuando se calcula la rama límite inferior se determinan estas constantes aditivas por acoplamiento con la solución analítica para las proximidades de  $(V_3, Z_3)$ , que a su vez ha de acoplarse con la rama límite superior. Nótese que  $(V_3, Z_3)$  es un puerto y las dos ramas de la solución son discontinuas en él, ya que corresponden a las dos direcciones excepcionales de este punto.

La solución analítica para las proximidades de  $(V_3, Z_3)$  puede obtenerse escribiendo las ecuaciones diferenciales (IV.5) en las variables:  $\xi = V_3 - V$ ,  $\eta = Z_3 - Z$ ,  $y = \ln(R)$ ; y linealizándolas posteriormente, con lo que admiten la solución:



$$\xi = ae^{\mu_1(y-y_m)} + be^{\mu_2(y-y_m)} \quad (\text{IV.18a})$$

$$\eta = \alpha_1 ae^{\mu_1(y-y_m)} + \alpha_2 be^{\mu_2(y-y_m)} \quad (\text{IV.18b})$$

$$\ln(r_p/r_m) = -(y-y_m)/(j+1) \quad (\text{IV.18c})$$

donde las magnitudes con subíndice m son las correspondientes al valor máximo de V,  $V_m$ . Puesto que, en  $y = y_m$ ,  $\xi$  es mínimo, se ha de cumplir la relación:  $a = \mu_2 b / \mu_1$

El acoplamiento de (IV.19) con la forma asintótica (IV.16), correspondiente a las dos ramas de la solución numérica que pasan por  $(V_3, Z_3)$ , nos permite obtener b,  $y_m$  y  $(r_m/r_i)$  en función de la densidad máxima que se desea obtener.

La forma asintótica de la solución (IV.18) en la región de acoplamiento ( $H \gg 1$ ) con la rama límite superior se obtiene de (IV.18a-b) despreciando los primeros sumandos del segundo miembro, puesto que  $y < y_m$ ,  $\mu_2 < 0$  y  $\mu_1 > 0$ . Al identificar estas expresiones asintóticas con (IV.16b-c), se obtiene:

$$be^{-\mu_2 y_m} = e^{-\mu_2 y_o} = \hat{b} \quad (\text{IV.19a})$$

$$(r_m/r_i) = (r_o/r_i) \hat{b}^{-1/(j+1)\mu_2} e^{-y_m/(j+1)} \quad (\text{IV.19b})$$

Estas expresiones nos permiten calcular, para una y dada (equivalente a  $V_m$  dada), los valores de b y  $(r_m/r_i)$ , puesto que  $y_o = \ln(R_o)$  y  $(r_o/r_i)$  han sido determinados previamente por la integración numérica de la rama límite superior.

La forma asintótica de (IV.18) en la región de acoplamiento ( $\eta \gg 1$ ) con la rama límite inferior se obtiene también de (IV.18a-b) despreciando los segundos sumandos del segundo miembro, puesto que ahora  $y > y_m$ . Por identificación de estas expresiones asintóticas con (IV.16b-c) obtenemos:

$$a = e^{\mu_1(y_2 - y_0)} e^{\mu_1(y_m - y_2)} = \hat{a} e^{\mu_1(y_m - y_2)} \quad (\text{IV.20a})$$

$$(r_r/r_i) = (r_m/r_i)(r_r/r_o) a^{1/(j+1)\mu_1} \quad (\text{IV.20b})$$

donde  $(y_2 - y_0) = \ln(R_2/R_0)$  y  $(r_r, r_o)$  son los valores obtenidos directamente de la integración numérica de la rama límite inferior hasta encontrar la onda de choque, cualquiera que sea el valor asignado a  $R_0$  y  $r_o$ .

Mediante la relación existente entre  $a$  y  $b$  ( $a = -\mu_2 b / \mu_1$ ) y los valores de  $a$  y  $b$  como función de  $R_m$  y  $R_2$  dados en (IV.19a) y (IV.20a), podemos calcular  $R_m = \exp(y_m)$  como función de la densidad final  $R_2$ , ( $y_2 = \ln R_2$ ),

$$R_m = \{ -(\mu_2/\mu_1)(\hat{b}/\hat{a})R_2^{\mu_1} \}^{1/(\mu_1 - \mu_2)} \quad (\text{IV.21})$$

Las relaciones (IV.19-21), junto con la integración numérica de las ramas límites superior e inferior, determinan por completo la solución.

La ley de presiones que hay que imponer en la superficie exterior para conseguir la densidad final deseada está dada por:

$$(\gamma_{p_p} / \rho_o c_o^2) = R \lambda^2 Z = R^{5/3}, \quad (\text{IV.22})$$

válida en todo el campo sin más que sustituir los valores correspondientes de  $R$ ,  $\lambda$  y  $Z$  para cada  $t$  en cada una de las zonas, obtenidos de la integración numérica de las ecuaciones (IV.15) en cada una de las ramas límites, y mediante (IV.15c-e) y (IV.18) en la región de transición.

Para valores de  $Z$  muy próximos a  $Z_3$  el radio de las distintas capas fluidas y la presión a que están sometidas tienden a las formas asintóticas:

$$r_p \sim t^{3/(j+4)} ; \quad p_p \sim t^{-5(j+1)/(j+4)}$$

Es interesante hacer notar que en las proximidades de  $(V_3, Z_3)$  las distribuciones de velocidad, presión (velocidad del sonido) y densidad, pueden escribirse, de acuerdo con las definiciones dadas en (III.4-6) y (IV.2-3), en la forma:

$$u = 2(r/t)/\{j(\gamma-1)+\gamma+1\} \quad (\text{IV.23a})$$

$$c^2 = (j+1)(\gamma-1)^2(r/t)^2/\{j(\gamma-1)+\gamma+1\}^2 \quad (\text{IV.23b})$$

$$(\rho/\rho_0)^{(\gamma-1)} = (j+1)(\gamma-1)^2(r/c_0 t)^2/\{j(\gamma-1)+\gamma+1\}^2 \quad (\text{IV.23c})$$

correspondiente a una solución exacta de las ecuaciones, con número de Mach constante ( $M=3^{1/2}$  para  $\gamma=5/3$ ,  $j=2$ ). Esta es una solución límite ( $q=1$ ,  $\beta \rightarrow \infty$ ) de las dadas por (Kidder, R.E.; 1974), que sin embargo no cumple la condición inicial de densidad uniforme y velocidad nula.

#### IV.5. RESULTADOS

En la tabla IV.1 se dan los valores de los coeficientes  $a$  y  $b$  que determinan la solución en la región de transición, así como los valores de  $r_m/r_i$ ,  $R_m = \rho_m/\rho_0$  y  $p_{00}/p_0$  en función de la densidad final  $R = \rho_r/\rho_0$ .  $\rho_{00}$  es la densidad cuando  $t=0$ .

En la Fig. IV.3 se han representado los valores de  $V_3 - V_m$  como función de la densidad máxima final  $(\rho_r/\rho_0)$  obtenido mediante la integración numérica de (IV.15) y mediante la solución en la región de transición,  $V_3 - V_m = a + b$ .

En la tabla IV.2 se dan los valores numéricos de las variables de semejanza  $Z$ ,  $V$ ,  $\lambda$  y  $R=\rho/\rho_0$ , así como los de la presión a que están sometidas las capas fluidas,  $p_p$ , y sus trayec-

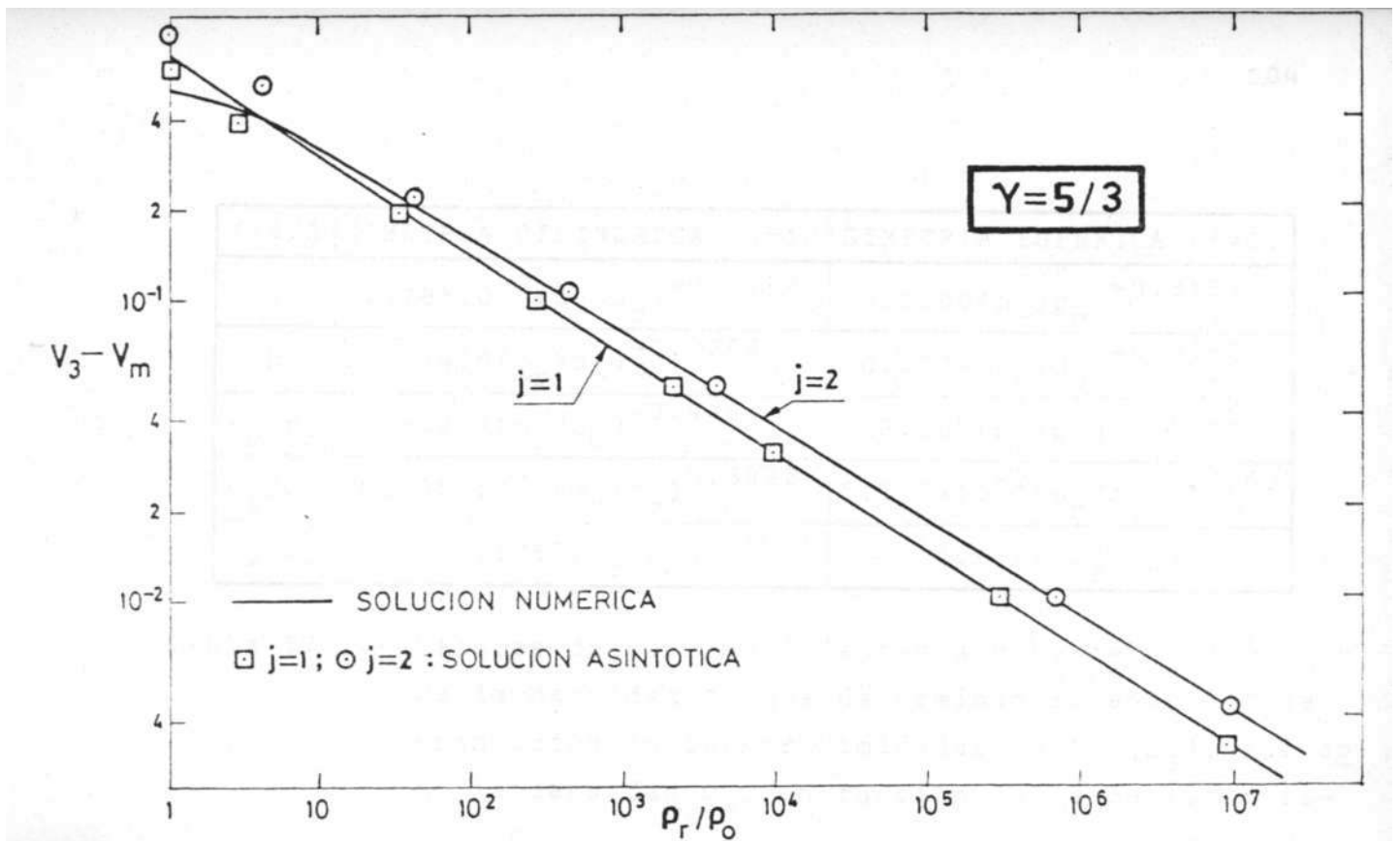


Fig. IV.3.-  $V_3 - V_m$  como función de la densidad final,  $\rho_r/\rho_0$ .  $V_3 = 0.6$  ( $j=1$ ),  $V_3 = 0.5$  ( $j=2$ ).

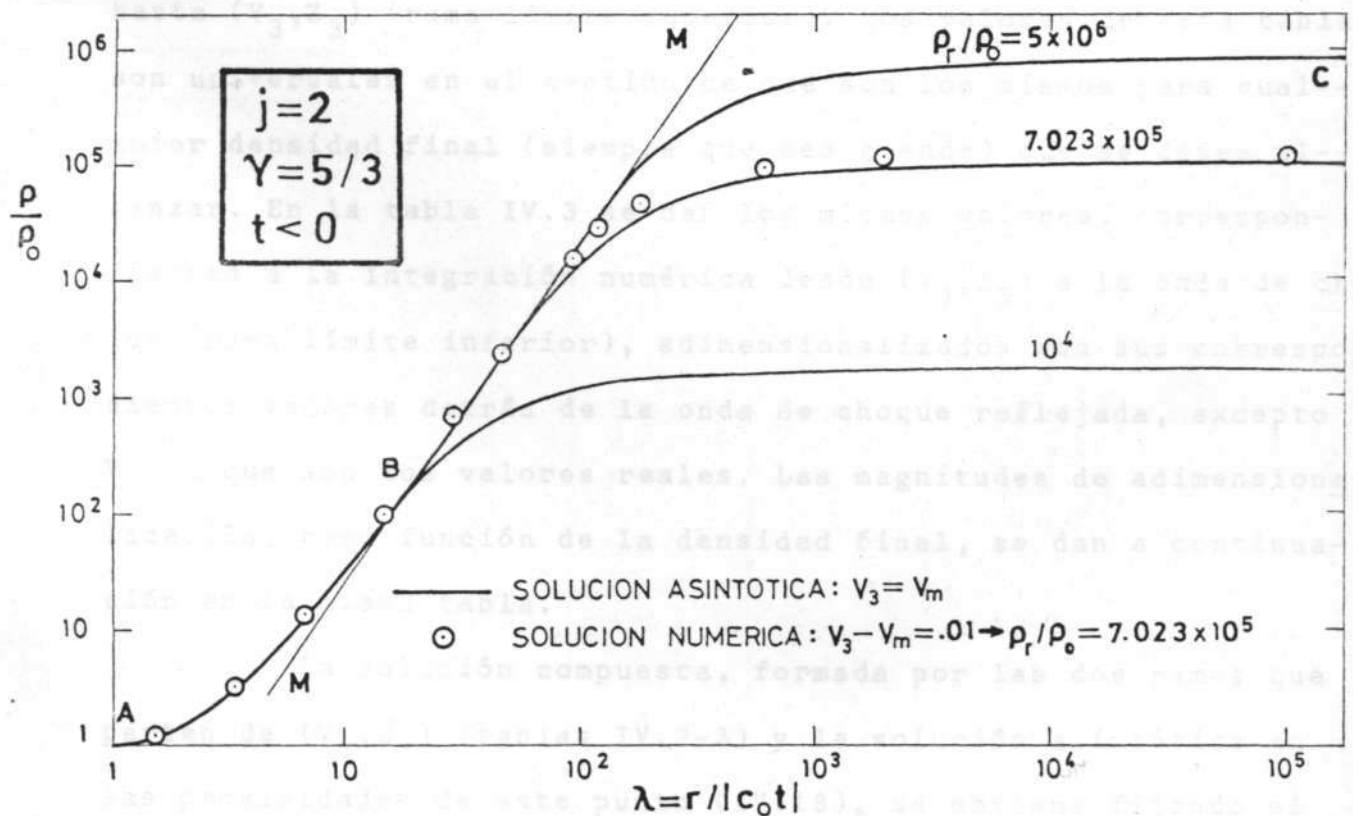


Fig. IV.4.- Densidad en función de  $\lambda$  ( $t < 0$ ). El tramo AB es universal y corresponde a la rama límite superior. El tramo BC corresponde a la rama límite inferior. Ambas ramas tienen la asíntota común MM. Las demás curvas que parten de B se generan desplazando BC a lo largo de la asíntota.

$\gamma=5/3$	SIMETRIA CILINDRICA ( $j=1$ )	SIMETRIA ESFERICA ( $j=2$ )
a	$6.528 \times 10^{-2} (\rho_r / \rho_o)^{-0.3269}$	$0.1300 (\rho_r / \rho_o)^{-0.3162}$
b	$0.5405 (\rho_r / \rho_o)^{-0.3269}$	$0.5774 (\rho_r / \rho_o)^{-0.3162}$
$r_m / r_i$	$6.296 (\rho_r / \rho_o)^{-0.4461}$	$3.385 (\rho_r / \rho_o)^{-0.2721}$
$\rho_m / \rho_o$	$6.305 \times 10^{-2} (\rho_r / \rho_o)^{0.8922}$	$5.157 \times 10^{-2} (\rho_r / \rho_o)^{0.8162}$
$\rho_\infty / \rho_o$	$0.1765 (\rho_r / \rho_o)$	$0.1696 (\rho_r / \rho_o)$

Tabla IV.1.- Valores de los coeficientes a y b, del radio r y de la densidad o que determinan la solución de transición en las proximidades de  $(V_3, Z_3)$ , así como la densidad  $\rho_{oo}$ , en función de la densidad final,  $\rho_r$ .

torias, correspondientes a la integración numérica desde  $(0,1)$  hasta  $(V_3, Z_3)$  (rama límite superior). Los valores de esta tabla son universales en el sentido de que son los mismos para cualquier densidad final (siempre que sea grande) que se desee alcanzar. En la tabla IV.3 se dan los mismos valores, correspondientes a la integración numérica desde  $(V_3, Z_3)$  a la onda de choque (rama límite inferior), adimensionalizados con sus correspondientes valores detrás de la onda de choque reflejada, excepto V y Z que son los valores reales. Las magnitudes de adimensionalización, como función de la densidad final, se dan a continuación en la misma tabla.

La solución compuesta, formada por las dos ramas que parten de  $(V_3, Z_3)$  (tablas IV.2-3) y la solución asintótica en las proximidades de este punto (IV.18), se obtiene fijando el valor de la densidad final  $(\rho_r / \rho_o)$ , siempre que este sea grande, con lo que se obtienen los valores de adimensionalización

SIMETRIA CILINDRICA (j=1) $\gamma=5/3$						
Z	V	$\rho/\rho_0$	$\lambda$	$\gamma p_p/\rho_0 c_0^2$	$t/ t_i $	$r_p/r_i$
1.	0.	1.	1.	1.	-1.	1.
.8969	2.598E-2	1.028	1.066	1.047	-.9374	.9992
.8038	5.456E-2	1.065	1.139	1.111	-.8746	.9984
.7107	6.792E-2	1.118	1.231	1.204	-.8045	.9905
.6175	.1269	1.194	1.350	1.344	-.7256	.9735
.5244	.1723	1.310	1.511	1.568	-.6354	.9602
.4313	.2258	1.506	1.745	1.979	-.5308	.9263
.3382	.2904	1.885	2.124	2.876	-.4071	.8647
.3102	.3125	2.077	2.291	3.381	-.3654	.8389
.2544	.3620	2.713	2.765	5.277	-.2749	.7601
.1985	.4203	4.259	3.639	11.19	-.1749	.6364
.1705	.4541	6.171	4.440	20.76	-.1227	.5448
.1426	.4919	11.07	5.902	54.99	-7.143E-2	.4216
.1146	.5352	33.51	9.523	3.493E2	-2.661E-2	.2534
9.168E-2	.5764	3.903E2	24.14	2.084E4	-3.222E-3	7.777E-2
8.444E-2	.5908	4.547E3	57.00	1.248E6	-4.067E-4	2.318E-2
8.176E-2	.5963	5.296E4	1.313E2	7.469E7	-5.207E-5	6.839E-3
8.071E-2	.5985	6.169E5	2.996E2	4.471E9	-6.706E-6	2.009E-3
8.012E-2	.5998	8.371E7	1.546E3	1.602E13	-1.118E-7	1.728E-4
8.005E-2	.5999	9.752E8	3.506E3	9.590E14	-1.444E-8	5.063E-5
2/25	3/5	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0.	0.

SIMETRIA ESFERICA (j=2) $\gamma=5/3$						
Z	V	$\rho/\rho_0$	$\lambda$	$\gamma p_p/\rho_0 c_0^2$	$t/ t_i $	$r_p/r_i$
1.	0.	1.	1.	1.	-1.	1.
.8925	1.193E-2	1.013	1.065	1.022	-.9386	.9997
.6974	5.259E-2	1.071	1.225	1.121	-.8120	.9950
.5023	.1199	1.224	1.509	1.401	-.6464	.9756
.4047	.1678	1.398	1.758	1.748	-.5410	.9509
.3072	.2301	1.780	2.187	2.614	-.4117	.9003
.2465	.2795	2.341	2.675	4.127	-.3141	.8401
.2222	.3024	2.756	2.974	5.417	-.2704	.8042
.1953	.3412	3.925	3.659	9.766	-.1991	.7286
.1615	.3709	5.652	4.433	17.93	-.1478	.6552
.1494	.3871	7.265	5.012	27.25	-.1213	.6079
.1372	.4044	10.06	5.827	46.83	-9.449E-2	.5506
.1130	.4431	30.02	9.248	2.900E2	-4.229E-2	.3911
9.369E-2	.4786	2.947E2	21.74	1.305E4	-8.587E-3	.1867
8.736E-2	.4915	2.893E3	48.20	5.374E5	-1.824E-3	3.792E-2
8.400E-2	.4986	2.789E5	2.255E2	1.191E9	-8.547E-5	1.927E-2
8.345E-2	.4998	2.688E7	1.037E3	2.412E12	-4.056E-5	4.206E-3
8.334E-2	.4999	2.639E8	2.221E3	1.036E14	-8.843E-7	1.964E-3
1/12	1/2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0.	0.

Tabla IV.2.- Variables de semejanza Z, V,  $\rho/\rho_0$  y  $\lambda$ , así como las trayectorias y presión,  $p_p$ , a que están sometidas las capas fluidas. Solución numérica correspondiente a la rama límite superior.

SIMETRIA CILINDRICA (j=1) $\gamma=5/3$						
Z	V	$\rho/\rho_r$	$\lambda/\lambda_r$	$p_r/p_r$	$t/t_r$	$r_p/r_r$
2/25	3/5	0.	0.	0.	$-\infty$	$\infty$
7.998E-2	.5999	7.441E-3	1.030	2.446E-4	-17.79	18.33
7.994E-2	.5997	1.061E-2	1.160	4.419E-4	-13.23	15.35
7.992E-2	.5991	1.512E-2	1.306	7.978E-4	-9.334	12.94
7.948E-2	.5975	2.156E-2	1.472	1.441E-3	-7.289	10.73
7.943E-2	.5927	3.073E-2	1.668	2.601E-3	-5.358	8.938
8.814E-2	.5824	6.245E-2	2.266	9.481E-3	-2.610	5.915
8.093E-2	.4539	8.905E-2	2.952	1.532E-2	-1.536	4.535
2.109E-2	.2744	.1269	5.164	2.764E-2	-.6381	3.295
1.161E-2	.1975	.1413	7.244	3.306E-2	-.4100	2.970
4.741E-3	.1237	.1546	11.63	3.841E-2	-.2336	2.717
9.121E-4	5.297E-2	.1671	27.22	4.373E-2	-9.237E-2	2.514
0.	0.	.1765	$\infty$	4.790E-2	0.	2.330
1.132E-3	-5.811E-2	.1867	24.91	5.261E-2	9.068E-2	2.250
4.465E-3	-.1109	.1961	12.99	5.710E-2	.1650	2.143
7.478E-2	-.4098	.2511	3.443	8.621E-2	.4892	1.681
.2194	-.6389	.2376	2.147	.1144	.6070	1.432
.4042	-.8139	.3379	1.634	.1414	.7313	1.277
.6213	-.9475	.3733	1.363	.1669	.8609	1.173
.6535	-1.049	.4045	1.194	.1908	.9195	1.098
1.039	-1.127	.4324	1.092	.2133	.9644	1.043
1.322	-1.136	.4575	1.	.2343	1.	1.
ONDA DE CHOQUE						
2.581	0.	1.	1.	1.	1.	1.

Valores de adimensionalización:  $\lambda_r = 0.6702(\rho_r/\rho_0)^{1/3}$ ;  $(\gamma p_r/\rho_0 c_0^2) = 1.159(\rho_r/\rho_0)^{5/3}$   
 $(t_r/|t_i|) = 1.492(\rho_r/\rho_0)^{-5/6}$ ;  $(r_r/r_i) = (\rho_r/\rho_0)^{-1/2}$

SIMETRIA ESFERICA (j=2) $\gamma=5/3$						
Z	V	$\rho/\rho_r$	$\lambda/\lambda_r$	$p_r/p_r$	$t/t_r$	$r_p/r_r$
1/12	1/2	0.	0.	0.	$-\infty$	$\infty$
9.3331E-2	.49999	2.097E-4	.2618	7.285E-7	-81.03	21.21
8.330E-2	.4999	9.957E-4	.4395	9.609E-6	-28.87	12.66
8.284E-2	.4980	4.633E-3	.7363	1.267E-4	-10.25	7.547
8.148E-2	.4923	1.005E-2	.9613	4.607E-4	-6.044	5.810
7.655E-2	.4717	2.178E-2	1.284	1.672E-3	-3.451	4.430
6.329E-2	.4028	4.722E-2	1.872	6.072E-3	-1.755	3.285
2.147E-2	.2159	.1024	4.060	2.206E-2	-.5710	2.318
1.627E-2	.1345	.1116	4.799	2.546E-2	-.4632	2.223
8.162E-3	.1262	.1291	7.116	3.246E-2	-.2909	2.070
1.337E-3	4.865E-2	.1534	18.62	4.327E-2	-.1020	1.899
0.	0.	.1596	$\infty$	5.115E-2	0.	1.807
2.030E-3	-5.588E-2	.1391	16.20	6.132E-2	.1056	1.711
.1276	-.3451	.3205	2.435	.1477	.5437	1.324
.3966	-.4854	.4361	1.532	.2469	.7547	1.156
.6307	-.5243	.5096	1.279	.3200	.8505	1.038
.8156	-.5298	.5612	1.161	.3758	.9059	1.052
.9607	-.5227	.5998	1.094	.4193	.9420	1.031
1.076	-.5105	.6300	1.051	.4657	.9673	1.017
1.169	-.4965	.6544	1.021	.4955	.9859	1.007
1.244	-.4822	.6747	1.	.5109	1.	1.
ONDA DE CHOQUE						
1.643	0.	1.	1.	1.	1.	1.

Valores de adimensionalización:  $\lambda_r = 0.7864(\rho_r/\rho_0)^{1/3}$ ;  $(\gamma p_r/\rho_0 c_0^2) = 1.015(\rho_r/\rho_0)^{5/3}$   
 $(t_r/|t_i|) = 1.272(\rho_r/\rho_0)^{-2/3}$ ;  $(r_r/r_i) = (\rho_r/\rho_0)^{-1/3}$

Tabla IV. 3.- Variables de semejanza Z, V, y  $\lambda$ , así como las trayectorias y presión,  $p_r$ , a que están sometidas las distintas caras fluidas. Solución numérica correspondiente a la rama límite inferior. Los valores de adimensionalización se dan en función de la densidad final,  $\rho_r/\rho_0$ .

anteriores, así como los valores de  $a$  y  $b$ . Conocidas las magnitudes de adimensionalización se obtienen los valores reales de las variables de la tabla IV.3 y el acoplamiento de ambas ramas límites dado por (IV.15c-e) y (IV.18), con lo que queda descrita toda la solución.

En la Fig. IV.4 se han representado las distribuciones de densidad, para  $t < 0$ , como función de  $\lambda$ , correspondientes a tres valores distintos de la densidad máxima. En la región interior, tramo AB, la distribución es universal y corresponde a la rama límite superior. En la región exterior la distribución de densidades tiene también una forma universal cuando se utilizan escalas logarítmicas, pudiéndose pasar de una curva a otra desplazando una de ellas (por ejemplo, la BC) de manera que se conserve la asíntota común MM. Esta asíntota corresponde a la solución descrita por Kidder y citada anteriormente. Como comparación, en esta misma figura se da la solución numérica correspondiente a  $V_3 - V_m = 0.01$  ( $\rho_r/\rho_o = 7.023 \times 10^5$ ).

En la Fig. IV.5 se han representado las trayectorias correspondientes a una densidad máxima final 10 veces la inicial. También se han representado los perfiles de densidad en función del radio en dos instantes ( $t < 0$  y  $t > 0$ ). Esta trayectoria se ha representado con la solución compuesta formada por las dos ramas límites numéricas y la solución analítica intermedia.

En la Fig. IV.6 se ha representado, mediante la solución compuesta, la presión en el exterior de la esfera en función del tiempo, que conduce a la solución de semejanza, correspondiente a dos densidades finales distintas ( $10^3$  y  $10^4$  veces



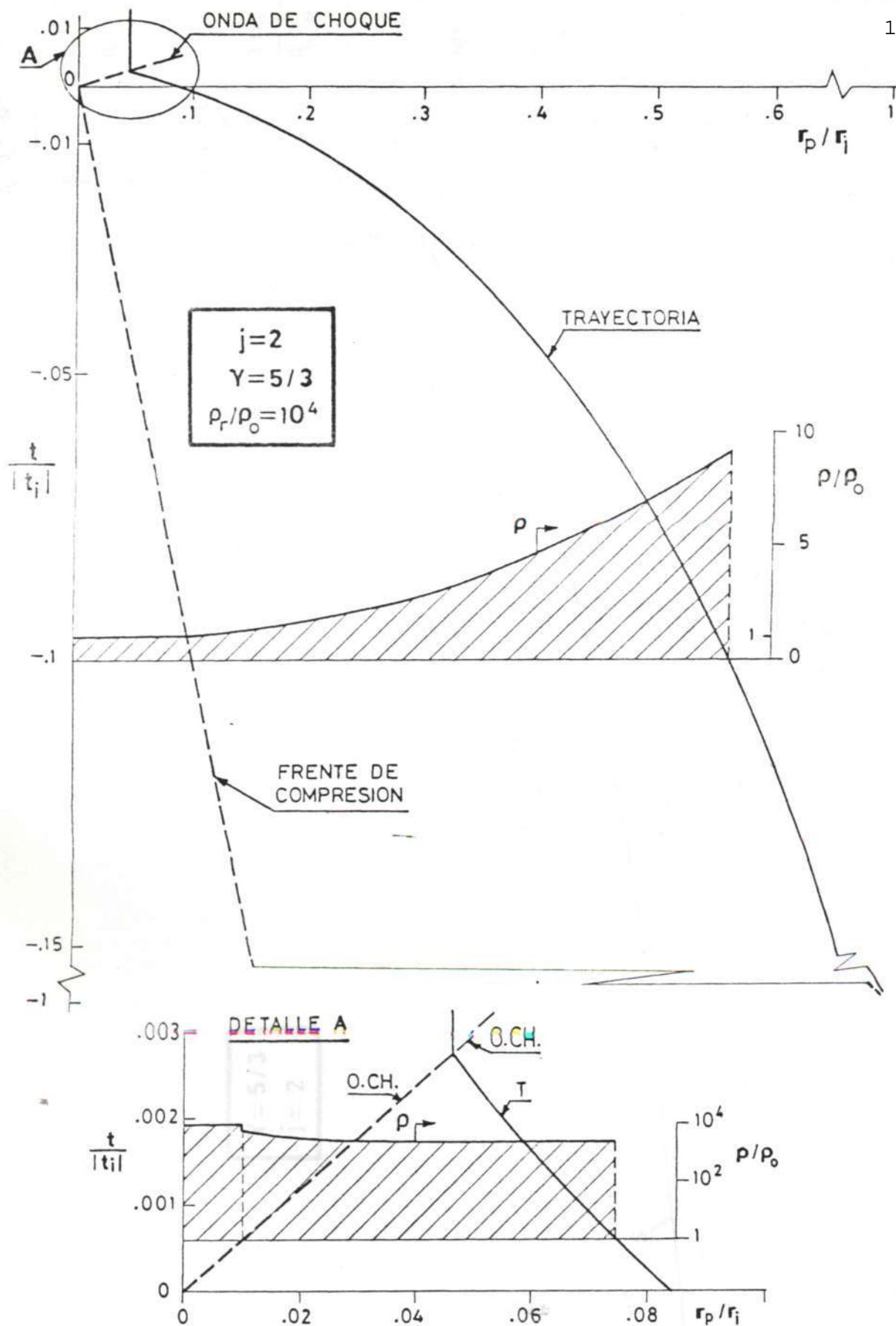


Fig. IV.5.- Trayectorias y distribuciones de densidad en dos instantes ( $t < 0$  y  $t > 0$ ). Solución compuesta mediante la analítica intermedia y las dos ramas numéricas.

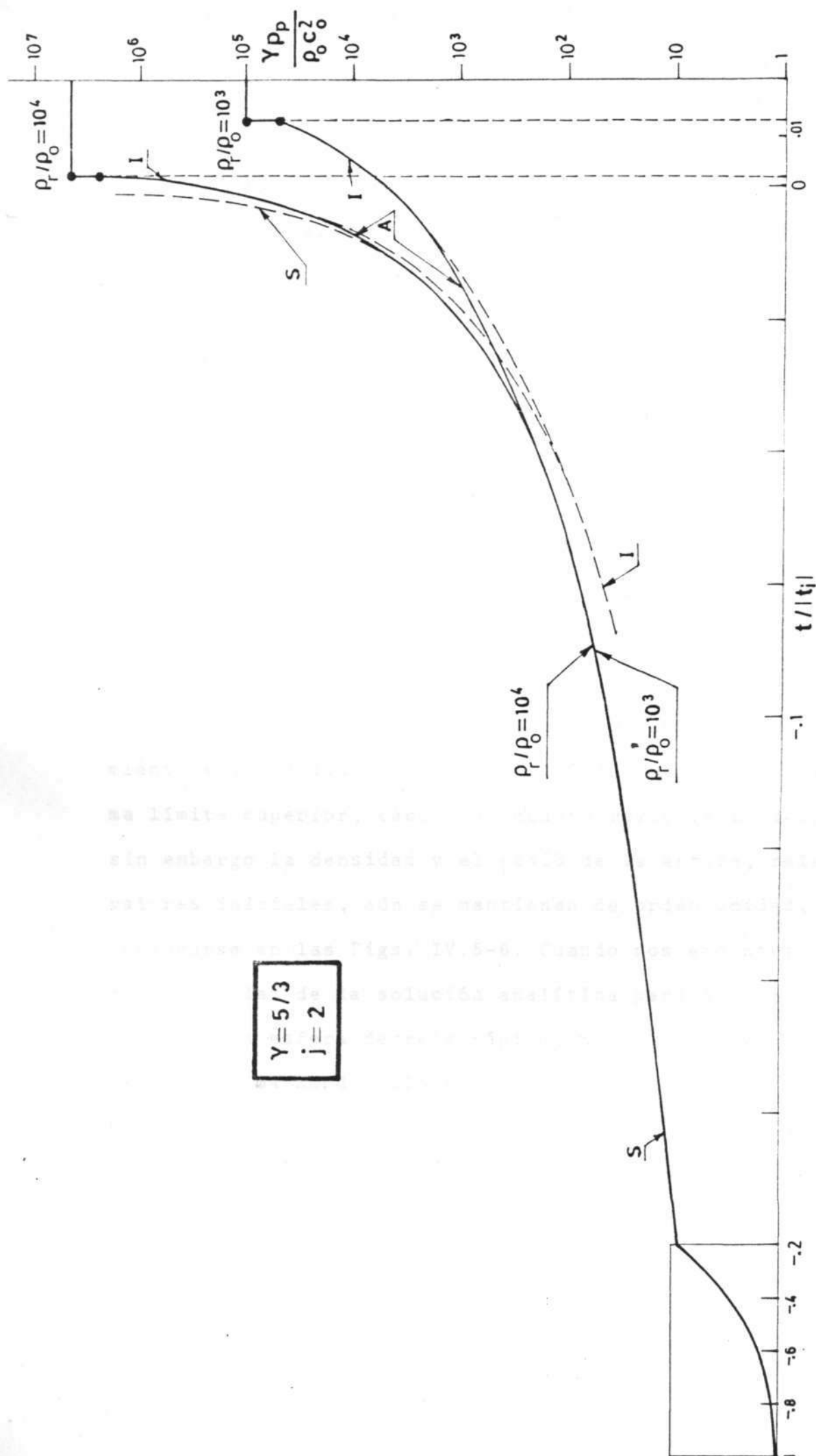


Fig. IV.6.- Presión a que están sometidas las capas fluidas en función del tiempo. Densidad final  $10^3$  y  $10^4$  veces la inicial. S  $\equiv$  Rama límite superior. A  $\equiv$  Solución analítica intermedia. I  $\equiv$  Rama límite inferior.

la inicial respectivamente).

Las etapas primeras del proceso de compresión de la bola son universales, independientemente de la densidad final a obtener cuando esta es grande y corresponde a la rama límite superior de la Fig. IV.Ib; si se continuase la trayectoria hasta  $(V_3, Z_3)$  se obtendrían las presiones y densidades altas representadas por la curva S de la Fig. IV.6. La solución asintótica en las proximidades de  $(V_3, Z_3)$  nos indica cómo hemos de cambiar el ritmo de crecimiento de la presión exterior dependiendo de la densidad final que se desee (curvas A de la Fig. IV.6), empalmando con la solución numérica correspondiente a la rama límite inferior (curvas I de la Fig. IV.6), que nos lleva a alcanzar el valor final.

La mayor parte del tiempo de compresión transcurre mientras es válida la solución numérica correspondiente a la rama límite superior, tanto más cuanto mayor es la densidad final, sin embargo la densidad y el radio de la esfera, relativos a sus valores iniciales, aún se mantienen de orden unidad, como puede observarse en las Figs. IV.5-6. Cuando nos encontramos en la zona de validez de la solución analítica para la transición, el radio de la esfera decrece rápidamente y la densidad aumenta muy deprisa, alcanzando valores

$$(r_m/r_i) \sim (\rho_r/\rho_o)^{-\mu_1(j+1)/3(j+1)(\mu_1-\mu_2)} \quad \text{y}$$

$$(\rho_m/\rho_o) \sim (\rho_r/\rho_o)^{\mu_1/(\mu_1-\mu_2)} \quad \text{cuando } V = V_m, \text{ en cuyo caso es } (t/t_m) \sim$$

$$\sim (\rho_r/\rho_o)^{-\mu_1(j+1)/3(j+1)(\mu_1-\mu_2)}$$

V. PRIMERAS ETAPAS DEL PROCESO IMPLOSIVO  
MEDIANTE ONDA DE CHOQUE.

/

/

### V.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo estudiaremos las primeras etapas del proceso implosivo cuando una onda de choque se origina en un material mediante la aplicación brusca, en toda la superficie exterior ( $r=R_0$ ), de una presión uniforme que posteriormente evoluciona con el tiempo siguiendo una ley determinada.

Para tiempos pequeños medidos a partir del instante inicial, la posición de la onda de choque,  $R$ , difiere muy poco de su posición inicial,  $R_0$ ; es decir,  $(R - R_0)/R_0 \ll 1$ . Por esta razón buscaremos la solución en forma de desarrollos en serie de potencias de la variable  $x = (R - R_0)/R_0 \ll 1$  válido en principio para  $|x_s| \ll 1$ . Esta solución se obtiene en general hasta términos de orden  $x_s$ , dejando indicada la forma de obtener los de orden  $x_s^2$ .

Obtendremos la solución para formas arbitrarias de la ecuación de estado  $e_s = e(p_s, \rho_s)$ , que determina la energía interna del fluido detrás de la onda de choque en función de la presión y densidad y de la ecuación de las isentrópicas, se harán aplicaciones al caso en que el fluido se comporte como un gas perfecto y también al caso en que la velocidad de la onda de choque varíe linealmente con la velocidad del fluido inmediatamente detrás de ella. Esta última es una relación experimental, que sustituye a la ecuación  $e_s = e(p_s, \rho_s)$  y que se da con buena aproximación en el caso de ondas de choque que se propagan en sólidos a presiones relativamente altas (dependiendo del material) y cuando no hay cambios de fase (Rice, M.H. y otros; 1958), (Zeldovich, Ya.B. y Raizer, Yu.B.; 1967).

Una descripción analítica de las primeras etapas del proceso implosivo de una onda de choque fue dada por (Bach, G.G.

y Lee, J.H.; 1969), cuando existe simetría esférica o cilíndrica y para gas perfecto. La onda de choque se origina por la deposición instantánea y uniforme de una cantidad finita de energía por unidad de área en un radio finito  $R_0$ .

## V.2. ECUACIONES

Las ecuaciones que describen el movimiento son las dadas en (III.1-2) junto con la ecuación de la conservación de la entropía siguiendo a la partícula

$$Dp/Dt - (\gamma p/\rho) D\rho/Dt = 0 \quad (V.1)$$

donde  $D/Dt = \partial/\partial t + u/\partial r$  y  $\gamma(p, \rho) = (C_p - C_v)/(C_p + C_v)$ . Para gases perfectos  $\gamma$  es constante e igual a la relación de calores específicos.

Las ecuaciones del movimiento (III.1-2) y (V.1) las escribiremos en función de las variables independientes:

$$\xi = (r - R_0)/(R_s - R_0) \quad (V.2a)$$

$$x_s = (R_s - R_0)/R_0 \quad (V.2b)$$

en lugar de la posición  $r$  y el tiempo  $t$ . Debido a la definición de  $\xi$ , la onda de choque está situada siempre en  $\xi = 1$ , mientras que la superficie exterior está situada en  $\xi = \xi_1(x_s)$  a determinar. La variable  $x_s$  es nula en el instante inicial ( $R_s = R_0$ ) y vale -1 cuando la onda de choque llega al centro de simetría ( $R = 0$ ).

Como variables dependientes utilizaremos:

$$\phi(\xi, x_s) = u(r, t)/D(t) \quad (V.3a)$$

$$f(\xi, x_s) = p(r, t)/\rho_0 D^2(t) \quad (V.3b)$$

$$\psi(\xi, x_s) = \rho(r, t) / \rho_0 \quad (V.3c)$$

donde  $\rho_0$  es la densidad del material antes de ser alcanzado por la onda, de choque y  $D(t) = -dR_s/dt$  es la velocidad de propagación de dicha onda.

Con los cambios de variable (V.2-3) las ecuaciones del movimiento quedan en la forma:

$$(\phi - \xi) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \psi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + x_s \frac{\partial \psi}{\partial x_s} = - \frac{j x_s \phi \psi}{1 + x_s \xi} \quad (V.4a)$$

$$(\phi - \xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{1}{\psi} \frac{\partial f}{\partial \xi} + x_s \frac{\partial \phi}{\partial x_s} = - \theta_s \phi \quad (V.4b)$$

$$(\phi - \xi) \left[ \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\gamma f}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right] + x_s \left[ \frac{\partial f}{\partial x_s} - \frac{\gamma f}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_s} \right] = - 2 \theta_s f \quad (V.4c)$$

siendo  $\theta_s = x_s (d^2 x_s / dt^2) / (dx_s / dt)_s$ .

Las relaciones que ligan a las variables  $\phi$ ,  $\psi$  y  $f$  a uno y otro lado de la onda de choque ( $\xi = 1$ ) se obtienen a partir de las leyes de conservación de la masa, cantidad de movimiento y energía a ambos lados de la onda (Courant, R. y Friedrichs, K.O.; 1943), (Landau, L.D. y Lifshitz, E.M.; 1959). Estas relaciones, para una onda de choque intensa, son:

$$\psi(1, x_s) = 1 / \{1 - \phi(1, x_s)\} \quad (V.5a)$$

$$f(1, x_s) = \phi(1, x_s) \quad (V.5b)$$

$$e_s / D^2(t) = \phi^2(1, x_s) / 2 \quad (V.5c)$$

Las ecuaciones (V.4) y las condiciones en la onda (V.5) han de ir acompañadas por una condición adicional en la superficie libre, cuya posición  $\xi_1(x_s)$  ha de determinarse, y por las condiciones iniciales apropiadas. Como parte de la solución se obtendrá  $x_s(t)$  y por lo tanto  $\theta_s(t)$  y  $D(t)$ .

### V.3. DESARROLLO PARA TIEMPOS PEQUEÑOS

La velocidad de propagación de la onda de choque, desarrollada para  $x$  pequeño, será de la forma:

$$D = D_0 (1 + Ax_s + Bx_s^2 + \dots) \quad (V.6)$$

donde  $D_0$ ,  $A$  y  $B$  son constantes a determinar como parte de la solución. Dado que  $dR_s/dt = -D$ , tendremos

$$(D_0 t)/R_0 = -x_s \{1 - Ax_s/2 + (A^2 - B)x_s^2/3 + \dots\} \quad (V.7)$$

y de la definición de  $\theta_s(t)$  y (V.7) obtendremos:

$$\theta_s = x_s \{A + (2B - A^2)x_s + \dots\} \quad (V.8)$$

La posición de la superficie exterior,  $R_1(t)$ , desarrollada en potencias de  $x_s$ , será de la forma

$$R_\ell = R_0 (1 + Wx_s + Xx_s^2 + Yx_s^3 + \dots) \quad (V.9)$$

donde  $W$ ,  $X$  e  $Y$  son también constantes a determinar con la solución. La velocidad de esta superficie exterior,  $u_1 = -dR_1/dt$ , puede escribirse como

$$d(x_s \xi_\ell)/dx_s = \phi_\ell \{ \xi_\ell(x_s) \} \quad (V.10a)$$

siendo:

$$\xi_\ell = W + Xx_s + Yx_s^2 + \dots \quad (V.10b)$$

La condición adicional que necesitamos en la superficie exterior proviene de conocer la presión aplicada en ella. Supondremos que esta presión es una función arbitraria del tiempo con la única condición de que se aplica bruscamente en el instante inicial; es decir

$$p_\ell(t) = 0 \quad \text{para } t < 0, \quad p_\ell(t) = g(t) \quad \text{para } t \geq 0,$$

con  $g(0) \neq 0$ . Esta ley arbitraria de presiones exteriores puede



escribirse, para tiempos pequeños, en la forma:

$$p_g(t) = p_o(1 + Nt + Qt^2 + \dots) \quad (V.11)$$

donde  $p_o = g(0)$ ,  $N = (dg/dt)_o/g(0)$  y  $Q = (d^2g/dt^2)_o/2g(0)$ . Escribiendo (V.11) en función de  $f$  y  $x_s$ , tendremos:

$$f_g(x_s) = \frac{p_o}{\rho_o D_o^2} \left[ 1 - \{ (NR_o/D_o) + 2A \} x_s + \right. \\ \left. + \{ (5ANR_o/2D_o) + 3A^2 - (QR_o^2/D_o^2) - 2B \} x_s^2 + \dots \right] \quad (V.12)$$

Por último, las variables dependientes las escribiremos de la forma:

$$\phi(x_s, \xi) = \phi_o(\xi) + x_s \phi_1(\xi) + x_s^2 \phi_2(\xi) + \dots \quad (V.13a)$$

$$\psi(x_s, \xi) = \psi_o(\xi) + x_s \psi_1(\xi) + x_s^2 \psi_2(\xi) + \dots \quad (V.13b)$$

$$f(x_s, \xi) = f_o(\xi) + x_s f_1(\xi) + x_s^2 f_2(\xi) + \dots \quad (V.13c)$$

junto con el desarrollo de  $\gamma$  para tiempos pequeños

$$\gamma = \gamma_o + \{ G_p(2Af_o + f_1) + G_\rho \psi_1 \} x_s + \dots \quad (V.14)$$

siendo  $\gamma_o = \gamma(p_i, p_i)$ ,  $G_p = (\gamma/p)_i \rho_o D_o^2$  y  $G_\rho = (\gamma/\rho)_i \rho_o p_i$  y  $\rho_i$  son la presión y densidad del fluido en el instante inicial ( $p_i = p_o$ ).

Introduciendo los desarrollos (V.8), (V.13) y (V.14) en las ecuaciones diferenciales (V.4) y en las condiciones en la onda (V.5) e identificando términos del mismo orden en  $x_s$ , se obtiene una serie de ecuaciones diferenciales, con sus respectivas condiciones de contorno en la onda de choque y en la superficie exterior (V.12), que nos permiten obtener la solución hasta el orden de  $x_s$  que se retenga. Las ecuaciones hasta el orden de  $x_s^2$  se dan en el apéndice B y a continuación solamente

presentaremos los resultados.

Es interesante hacer notar que no haremos uso de la condición (V.5c) hasta que no se especifique cuál es la ecuación  $e = e(p_s, \rho_s)$ , por lo tanto todos los resultados se dejarán en función de  $\phi(1)$  que depende de  $e_s$ .

#### V.4. SOLUCIÓN

El primer término de cada uno de los desarrollos (V.13) que determina la solución en primera aproximación, para tiempos pequeños, viene dada por:

$$\phi_0(\xi) = \phi_0(1) = \text{constante} = \phi_0 \quad (\text{V.15a})$$

$$f_0(\xi) = f_0(1) = \text{constante} = f_0 \quad (\text{V.15b})$$

$$\psi_0(\xi) = \psi_0(1) = \text{constante} = 1/(1-\phi_0) \quad (\text{V.15c})$$

Para que la ecuación (V.12), que nos da la presión en la superficie exterior, se cumpla en primera aproximación, es necesario que:

$$D_0 = \sqrt{p_0 / \rho_0 \phi_0} \quad (\text{V.16})$$

mientras que (V.10) se obtiene, en primera aproximación, la posición de la superficie exterior

$$\xi_{\ell 0} = W = \phi_0 \quad (\text{V.17a})$$

que es equivalente a

$$R_{\ell 0} = R_0(1 + x_s \phi_0) \quad (\text{V.17b})$$

Los segundos términos del desarrollo (V.13), que determinan las perturbaciones de orden  $x_s$ , vienen dados por:

$$\phi_1(\xi) = \phi_1(1) + \delta(1-\xi) \quad (\text{V.18a})$$

$$f_1(\xi) = f_1(1) + \beta(1-\xi) \quad (V.18b)$$

$$\psi_1(\xi) = \psi_1(1) + \alpha(1-\xi) \quad (V.18c)$$

siendo:

$$\delta = j\phi_o - NR_o / Y_o D_o \quad (V.19a)$$

$$\beta = \{2j\phi_o(1-\phi_o)Y_o - [2 + (Y_o - 2)\phi_o](NR_o/D_o) + Y_o\phi_1(1)\} / 3Y_o(1-\phi_o) \quad (V.19b)$$

$$\alpha = -\{(1-\phi_o)(NR_o/D_o) + Y_o\phi_1(1)\} / Y_o(1-\phi_o)^3 \quad (V.19c)$$

Identificando los términos de orden  $x$  de (V.12) con (V.18b), particularizada en la superficie exterior, se obtiene:

$$A = \{[1 - (Y_o + 1)\phi_o](NR_o/D_o) - j(1-\phi_o)Y_o\phi_o - 2Y_o\phi_1(1)\} / 3Y_o\phi_o \quad (V.20)$$

mientras que la corrección de orden  $x_s$  para la posición de la superficie exterior nos da

$$X = \{\phi_1(1) + \delta(1-\phi_o)\} / 2 \quad (V.21)$$

Para los términos de orden  $x_s$  la solución es:

$$\begin{aligned} \phi_2(\xi) - \phi_2(1) + \delta_3(1-\phi_o)^2 \text{Ln}(1-\phi_o) &= \\ &= \delta_1(1-\xi) + \delta_2(1-\xi)^2 + \delta_3(\xi-\phi_o)^2 \text{Ln}(\xi-\phi_o) \end{aligned} \quad (V.22a)$$

$$\begin{aligned} f_2(\xi) - f_2(1) + \beta_3(1-\phi_o)^2 \text{Ln}(1-\phi_o) &= \\ &= \beta_1(1-\xi) + \beta_2(1-\xi)^2 + \beta_3(\xi-\phi_o)^2 \text{Ln}(\xi-\phi_o) \end{aligned} \quad (V.22b)$$

$$\begin{aligned} \psi_2(\xi) - \psi_2(1) + \alpha_3(1-\phi_o)^2 \text{Ln}(1-\phi_o) &= \\ &= \alpha_1(1-\xi) + \alpha_2(1-\xi)^2 + \alpha_3(\xi-\phi_o)^2 \text{Ln}(\xi-\phi_o) \end{aligned} \quad (V.22c)$$

Los coeficientes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  y  $\delta_3$  se obtienen sustituyendo las soluciones (V.22) en las ecuaciones diferenciales que determinan el orden  $x_s$  (apéndice B), e identificando términos se obtienen un sistema de nueve ecuaciones que nos determinan los nueve coeficientes.

Análogamente a los casos anteriores, identificando los términos de orden  $x_s$  de (V.12) con (V.22b) particularizada en la superficie exterior, proporciona la ecuación:

$$f_2(1) - \beta_3(1 - \phi_0)^2 \ln(1 - \phi_0) + \beta_1(1 - \phi_0) + \beta_2(1 - \phi_0)^2 = \\ = - \{ (5ANR_0 / 2D_0) + 3A^2 - (QR_0^2 / D_0^2) - 2B \} \quad (V.23)$$

de donde se obtiene el valor de 3 que determina los términos de orden  $x_s$  de la velocidad de propagación de la onda de choque. De (V.10) se obtiene:

$$Y = \frac{\delta}{6} \{ \phi_1(1) + \delta(1 - \phi_0) \} + \frac{1}{3} \{ \phi_2(1) - \delta_3(1 - \phi_0)^2 \ln(1 - \phi_0) + \\ + \delta_1(1 - \phi_0) + \delta_2(1 - \phi_0)^2 \} \quad (V.24)$$

que determina una nueva corrección a la posición de la superficie exterior.

#### V.5. OBTENCIÓN DE $\phi_0$ , $\phi_1(1)$ y $\phi_2(1)$ PARA UNA ECUACIÓN DE ESTADO

$$\text{GENERAL} \quad e_s = e(p_s, \rho_s)$$

En la solución obtenida en este capítulo no hemos hecho uso de la condición (V.5c) de salto a través de la onda, lo que nos ha obligado a dejar todos los resultados como función de  $\phi_0$ ,  $\phi_1(1)$  y  $\phi_2(1)$ , que se obtendrán de (V.5c) conocida la ecuación de estado  $e_s = e(p_s, \rho_s)$ .

En las soluciones (V.18b-c) y (V.22b-c) aparecen  $\psi(1)$ ,  $\psi_2(1)$ ,  $f_1(1)$  y  $f_2(1)$ , pero estas constantes se pueden determinar a partir de  $\phi_0$ ,  $\phi_1(1)$  y  $\phi_2(1)$  y las ecuaciones (V.5a-b) de la forma

$$\psi_1(1) = \phi_1(1) / (1 - \phi_0)^2 \quad (V.25a)$$

$$f_1(1) = \phi_1(1) \quad (V.25b)$$

$$\psi_2(1) = \{ |\phi_1(1)/(1-\phi_0)|^2 + \phi_2(1)/(1-\phi_0) \} / (1-\phi_0) \quad (V.25c)$$

$$f_2(1) = \phi_2(1) \quad (V.25d)$$

Para la obtención de  $\phi_0$ ,  $\phi_1(1)$  y  $\phi_2(1)$  no se necesita más que un desarrollo de la energía interna,  $e_s$ , válido para tiempos pequeños a partir del instante inicial, ya que la solución obtenida es sólo válida para estos tiempos pequeños:

$$e_s = e_{s0} + e_{s1}x_s + e_{s2}x_s^2 + \dots \quad (V.26a)$$

y como

$$\phi(1) = \phi_0 + x_s \phi_1(1) + x_s^2 \phi_2(1) + \dots \quad (V.26b)$$

podemos obtener, de (V.5c) junto con (V.6) y (V.16),

$$D_0 = p_0 / \rho_0 \sqrt{2e_{s0}} \quad (V.27a)$$

$$\phi_0 = 2\rho_0 e_{s0} / p_0 \quad (V.27b)$$

$$\phi_1(1) = (e_{s1} - 2Ae_{s0}) / \phi_0 D_0^2 \quad (V.27c)$$

$$\phi_2(1) = 2\{(3A^2 - 2B)e_{s0} - 2Ae_{s1} + e_{s2}\} / \phi_0 D_0^2 - \phi_1^2(1) / \phi_0 \quad (V.27d)$$

Los valores de  $e_{s0}$ ,  $e_{s1}$ , y  $e_{s2}$  pueden calcularse en función de las derivadas de  $e$  respecto a  $p$  y  $\rho$ , dándose en el apéndice B. Los valores de  $e_{s1}$ ,  $e_{s2}$ ,  $A$  y  $B$  dependen a su vez de  $\phi_1(1)$  y  $\phi_2(1)$ , por lo que (V.27c-d) es un sistema implícito de ecuaciones para determinar las incógnitas  $\phi_1(1)$  y  $\phi_2(1)$ .

#### V.5.1. Caso de un gas perfecto

Cuando el fluido se comporta como un gas perfecto, la ecuación  $e=e(p,\rho)$  es:

$$e = p / (\gamma - 1) \rho \quad (V.28)$$

con  $Y$  constante. Con esta ecuación de estado las relaciones (V.27) se reducen a

$$\phi_0 = 2/(\gamma+1) ; \quad \phi_1(1) = \phi_2(1) = 0 \quad (V.29)$$

V.5.2. Caso en que la ecuación de la energía a través de la onda de choque se sustituye por la relación experimental

$$D = E + Gu_s$$

La ecuación de estado de los sólidos a altas presiones y temperaturas puede determinarse experimentalmente mediante ondas de choque que se propaguen en él (Walsh, J.M. y Christian, R.H.; 1955), (Persson, P.A. y Persson, I.; 1964), (Al'tshuler, L.V.; 1965), (Miller, D.; 1965), (Thiel, M. y otros; 1966), (Al'tshuler, L.V. y otros; 1958). De los resultados experimentales se ha visto que, para muchos materiales e intensidades de la onda de choque comprendidas en un margen relativamente amplio, existe una relación muy aproximadamente lineal entre la velocidad del material detrás de la onda de choque,  $u_s$ , y la velocidad de dicha onda,  $D$ ,

$$D = E + Gu_s \quad (V.30)$$

donde  $E$  y  $G$  son constantes que dependen del material.

Cuando se da (V.30), esta ecuación sustituye a (V.5c) y los valores de  $D_0$ ,  $\phi_0$ ,  $\phi_1(1)$  y  $\phi_2(1)$  obtenidos en ella, junto con (V.16), son:

$$D_0 = E \{1 + \sqrt{1 + (4Gp_0/\rho_0 E^2)}\} / 2 \quad (V.31a)$$

$$\phi_0 = (1 - E/D_0) / G \quad (V.31b)$$

$$\phi_1(1) = AE/GD_0 \quad (V.31c)$$

$$\phi_2(1) = -(A^2 - B)E/GD_0 \quad (V.31d)$$

#### V.6. RESULTADOS

La solución obtenida en este capítulo puede escribirse en la forma :

$$\phi(\xi, x_s) = \phi_0 + \{\phi_1(1) + \delta(1 - \xi)\}x_s + x_s^2 \phi_2(\xi) + \dots \quad (V.32a)$$

$$f(\xi, x_s) = \phi_0 + \{\phi_1(1) + \beta(1 - \xi)\}x_s + x_s^2 f_2(\xi) + \dots \quad (V.32b)$$

$$\psi(\xi, x_s) = 1/(1 - \phi_0) + \{\phi_1(1)/(1 - \phi_0)^2 + \alpha(1 - \xi)\}x_s + x_s^2 \psi_2(\xi) + \dots \quad (V.32c)$$

con  $\delta$ ,  $\beta$  y  $\alpha$  dados en (V.19) y  $\phi_2(\xi)$ ,  $f_2(\xi)$  y  $\psi_2(\xi)$  dados en (V.22).

La posición y velocidad de propagación de la onda de choque, así como la posición de la superficie exterior, están dadas por:

$$R_s = R_0(1 + x_s) \quad (V.33a)$$

$$D = \sqrt{p_0/\rho_0 \phi_0}(1 + Ax_s + Bx_s^2 + \dots) \quad (V.33b)$$

$$(R_s - R_0)/R_0 = x_s \{\phi_0 + [\phi_1(1) + \delta(1 - \phi_0)]x_s/2 + Yx_s^2 + \dots\} \quad (V.33c)$$

donde A, B e Y están dados en (V.20), (V.23) y (V.2V), respectivamente.

La posición r y el tiempo t están dados por:

$$r = R_0 + (R_s - R_0)\xi \quad (V.34a)$$

$$D_0 t/R_0 = -x_s \{1 - Ax_s/2 + (A^2 - B)x_s^2/3 + \dots\} \quad (V.34b)$$

De particular importancia es la información que se obtiene, relativa a la propagación de la onda de choque, incluida en el valor de A dado en (V.20). En particular la velocidad, D, de propagación de la onda puede escribirse para tiempos peque-

ños en la forma:

$$D = D_0 \{1 - A(D_0 t / R_0) + \dots\} \quad (V.35a)$$

siendo

$$A = -\frac{1}{v} \left[ \frac{(\gamma_0 + 1)\phi_0 - 1}{3\gamma_0\phi_0} \cdot \frac{NR_0}{D_0} + \frac{j(1 - \phi_0)}{3} \right] \quad (V.35b)$$

donde  $v$  es un coeficiente mayor o igual a la unidad.  $v = 1$  en el caso de un gas perfecto y  $v = 1 + 2E/3GD_0\phi_0$  cuando se tiene la relación experimental  $D = E + Gu_s$ . Para obtener  $v$  en zeneral, es necesario resolver el sistema implícito de ecuaciones (V.20) y (V.27c) junto con  $e_{s1} = e_{s1}(A, \phi_1(1))$ , dado en el apéndice B, para despejar explícitamente el valor de  $A$ .

En la ecuación (V.35) observamos que  $A$  consta de dos sumandos. El primer sumando representa el efecto de la presión exterior, que contribuye a decelerar la onda cuando la presión exterior decrece ( $N < 0$ ) y a acelerarla cuando la presión exterior crece ( $N > 0$ ). El segundo sumando representa el efecto de la convergencia geométrica, que es siempre un efecto acelerador de la onda. Nótese que la onda se acelera cuando  $A < 0$  ya que al ser  $x < 0$ , el producto  $Ax_s$  es positivo.

Otra conclusión importante que se puede deducir de los resultados obtenidos es el valor mínimo de la presión,  $p_0$ , en la superficie exterior para que sea aplicable la relación experimental  $D = E + Gu_s$ . Cuando en la superficie exterior de un sólido semi-infinito se aplica bruscamente una presión  $p_0$ , se origina una onda de choque plana que avanza hacia el interior del sólido con una velocidad constante  $D_0$ , dejando al material moviéndose a una velocidad constante  $u_s$  y con una presión  $p_0$  (solución (V.15)). Una pequeña variación de la presión exterior respecto



a su valor constante  $p_0$  se propagaría por el material con una velocidad  $u_s + c$ , siendo  $c$  la velocidad del sonido en el medio, respecto a un observador ligado a tierra. Puesto que si la presión exterior aumenta o disminuye la onda de choque se acelera o decelera, es obvio que la velocidad de la onda ha de ser tal que  $D_0 < u_s + c$ , va aue en caso contrario las perturbaciones no alcanzarían a la onda y ésta no se enteraría de las variaciones de presión exterior. La condición  $D_0 < u_s + c$  se traduce en

$$\phi_0 \geq 1/(\gamma_0 + 1) \quad (V.36)$$

que con (V.31a-b) puede escribirse:

$$p_0 \geq (\gamma_0 + 1) \rho_0 E^2 / (\gamma_0 + 1 - G)^2 . \quad (V.37)$$

Por lo tanto la aproximación lineal (V.30) no puede tener validez para intensidades de la onda tales que no se cumpla (V.37).

La condición (V.36) se puede deducir directamente de (V.35), ya que si  $(\gamma_0 + 1)\phi_0 < 1$  cuando la presión exterior aumenta ( $N > 0$ ), este aumento de presión se traduciría en una deceleración de la onda, lo cual es absurdo. Por lo tanto  $\phi_0 > 1/(\gamma_0 + 1)$ .

En la Fig. V.1 se han representado las presiones y densidades en la superficie exterior y en la onda de choque, la posición de la superficie exterior y de la onda de choque, así como su velocidad como función del tiempo, en el caso de un gas perfecto con  $\gamma = 3$ ,  $j = 2$  y  $(NR_0/D_0) = -(QR_0^2/D_0^2) = -1$ . En estos gráficos se han retenido hasta términos del orden de  $x_s^2$ . El sistema de ecuaciones que determina  $B$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\delta_1$  y  $\delta_2$  para el caso de un gas perfecto, está dado en el apéndice B.

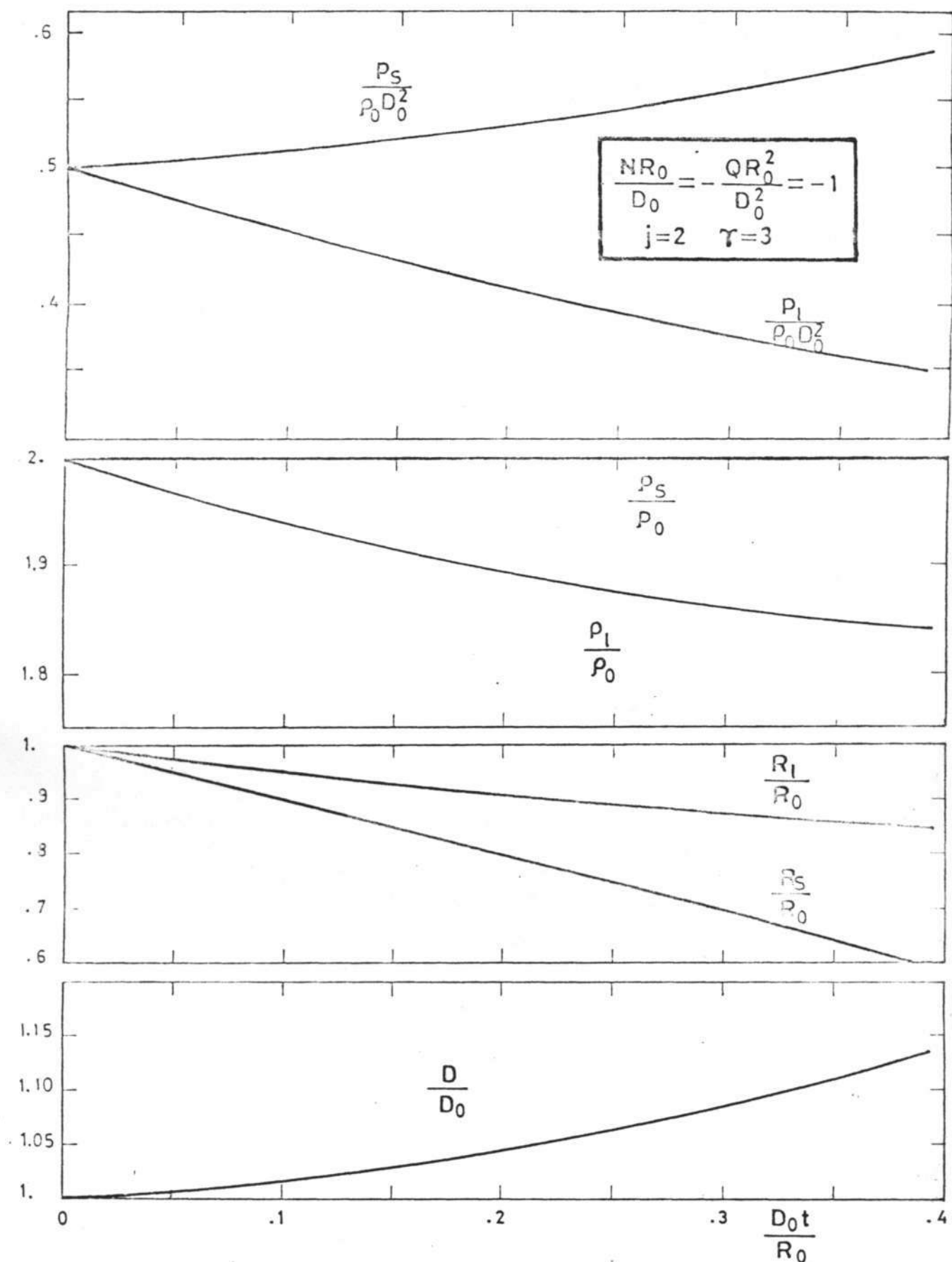


Fig. V.1.- Radios, presiones y densidades en la onda de choque y la superficie exterior y velocidad de la onda de choque como función del tiempo. Solución reteniendo términos hasta el orden de  $t^2$ . Gas perfecto.

## REFERENCIAS

## REFERENCIAS

- Al'tshuler, L.V., 1958 "Dynamic Compressibility and Equation of State of Iron under High Pressure" Krupnikov, K.K., Ledenev, B.N., Zhuchikhin, V.I., Brazhnik, M.I. J. Exptl. Theoret. Phys. Vol. 34, pp. 874-85, 1958 (transl. Sov. Phys. JETP, Vol. 34(7), No. 4, pp. 606-13, 1958).
- Al'tshuler, L.V. 1965 "Use of Shock Waves in High-Pressure Physics<sup>11</sup>, Usp. Fiz. Nauk 85, pp. 197-258, 1965, (transl. Sov. Phys. Usp., Vol. 8, No. 1, pp. 52-91, 1965).
- Each, G.G., 1969 "Initial Propagation of Impulsively Generated Converging Cylindrical and Spherical Shock Waves", J. Fluid Mech., Vol. 37, pp. 513-28, 1969.
- Barenblatt, G.I., 1972 "Self-Similar Solutions as Intermediate Asymptotics", Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 4, pp. 285-312, 1972.
- Brueckner, K.A., 1974 "Laser-Driven Fusion", Jorna, S. Rev. Mod. Phys., Vol. 46, No. 2, pp. 325-67, 1974.
- Butler, D.S. 1954 "Converging Spherical and Cylindrical Shocks", Armament Research Establishment, Rep. No. 54/54, Ministry of Supply, Fort Halstead, Kent, 1954.

- Cole, J.D. 1968 "Perturbation Methods in Applied Mathematics'',  
Ed. Blaisdell Pub. Co., Waltham, Mass.  
1958.
- Courant, R., 1948 "Supersonic Flow and Shock Waves",  
Friedrichs, K.O. Ed. Interscience Pub., Inc., New  
York, 1948.
- Emniettt, J.L. , 1974 "Fusion Power by Laser Implosion",  
Nuckolls, J., Scient. Amer., pp. 24-37, June 1974.  
Wood, L.
- Ferro Fontan, C., 1975 "Self-Similiar Spherical Implosión",  
Gratton, J., Phys. Lett., Vol. 55A, No. 1, pp.  
Gratton, R. 35-37, 1975.
- Friedrichs, K.O. 1965 "Advanced Ordinary Differential Equa-  
tions",  
Ed. Gordon and Breach Science Pub.,  
Inc., New York, 1965 .
- Glasstone, S., 1960 "Controlled Thermonuclear Reactions",  
Lovberg, R.H. D. van Nostrand, Ed. , Princeton,  
Chap. II, 1950.
- Goldman, E.B. 1973 "Numerical Modeling of Laser Produced  
Plasmas: The Dynamics and Neutron  
Production in Dense Spherically Sym-  
metric Plasmas" ,  
Plasma Phys., Vol. 15, pp. 289-310,  
1973.
- Gough, W.C. 1971 "The Prospects of Fusion Power",  
Eastlund, B.J. Scient. Amer., pp. 50-64, Feb. 1971.

- Guderley, G.                      1942    "Starke Kugelige und Zylindrische Verdichtungsstosse in der Nahe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse",  
Luftfahrtforschung, Vol. 19, No. 9, pp. 302-12, 1942.
- Ishiguro, Y.,                      1976    "Self-Similar Analysis of the Spherical Implosion Process",  
J A E RI-M 5616, Division of Reactor Engineering, Tokai, 1975.
- Kidder, R.E.                      1971    "Interaction of Intense Photon and Electron Beams with Plasmas",  
in "Physics of High Energy Density", P. Cardinola & H. Knoepfel, Eds., Academic Press, New York, 1971, p. 306
- Kidder, R.E.                      1974    "Theory of Homogeneous Isentropic Compression and its Application to Laser Fusion",  
Nucl. Fusion, Vol. 14, pp. 53-60, 1974.
- Landau, L.D. ,                      1959    "Fluid Mechanics" ,  
Lifshitz, E.M.                      Ed. Pergamon, London, 1959.
- 1957    "Some Criteria for a Power Producing Thermonuclear Reactor",  
Lawson, J.D.                      Proc. Phys. Soc., Vol. B70, pp. 6-10, 1957.
- 1973    "Exact Steady-State Analogy of Transient Gas Compression by Coalescing Waves",  
Lengyel, L.L.                      AIAA Journal, Vol. 11, pp. 1347-9, 1973. Tambien en "Laser Plasmas and Nuclear Energy", H. Hora , Y. Ksander ed., Plenum Press, New York, 1973, pp. 369-75.

- Linan, A.,  
Rodriguez, M.                      1977    "Implosiones en Medios Condensados  
   Inertes y Detonantes",  
   J.E.N. 367, Junta de Energia Nuclear,  
   Madrid, 1977.
- Miller, D.                              1965    "A Critical Review of the Properties  
   of Materials at the High Temperatures  
   and Pressures Significant for Fast  
   Reactor Safety",  
   Proceedings of the Conference on Sa-  
   fety, Fuels, and Core Design in large  
   Fast Power Reactors, Rep. ANL-7120,  
   Argonne National Lab., Ill., 1965,  
   pp. 641-53.
- Nuckolls, J.,  
Wood, L.,  
Thiessen, A.,  
Zimmerman, G.                      1972    "Laser Compression of Matter to Super-  
   High Densities: Thermonuclear (CTR)  
   Applications",  
   Nature, Vol. 239, pp. 139-42, 1972.
- Nuckolls, J.H.                          1973    "Laser-Induced Implosion and Thermo-  
   nuclear Burn",  
   in "Laser Interaction and Related  
   Plasma Phenomena", Vol. 33, pp. 399-  
   425, H.J. Schwartz & H. Mora, Eds.,  
   Plenum Press, New York, 1973.
- Persson, P.A. ,  
Persson, I .                              1964    "Determination of State Data for Ura-  
   nium at High Pressures by Means of  
   Shock Wave Experiments",  
   Transl. from FAO 2, Rep. A 2299-222,  
   Stockholm, 1964.
- Ribe, F.L.                                1975    "Fusion Reactor Systems",  
   Rev. Mod. Phys., Vol. 47, No. 1, pp.  
   7-41, 1975.

»

- |  |      |  |
|--|------|--|
| Rice, M.H.,<br>McQueen, R.G.,<br>Walsh, J.M.                   | 1958 | "Compression of Solids by Strong Shock Waves",<br>Solid State Phys., Vol. 6, No. 1,<br>1953.   |
| Sedov, L.I.  | 1959 | "Similarity and Dimensional Methods in Mechanics",<br>Ed. Academic Press, New York, 1959.  |
| Joyce, G.  | 1971 | Nucl. Fusion, Vol. 11, p. 447, 1971.   |
| Somon, J.P.,<br>Linhart, J.G.,<br>Knoepfel, H.                 | 1952 | "Contribution a la Theorie des Chocs Convergenents",<br>Nucl. Fusion: Supplement, Part 2, pp.<br>717-26, 1962.   |
| Somon, J.P.  | 1971 | "Cumulation Processes. Self-Similar Solutions in Gas Dynamics",<br>in "Physics of High Energy Density",<br>Academic Press, New York, 1971, pp.<br>189-215. |
| Stanyukovich, K.P.   | 1960 | "Unsteady Motion of Continuous Media",<br>Pergamon Press, London, 1960.  |
| Sudhanshu, S.Jha.,<br>Chavda, L.K.                             | 1976 | "Approximate Solution for Spherical Implosion of Coalesced Weak Shocks in Plasma",<br>TIFR/TH/76-32, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1976. |
| Thiel, M.,<br>Kusubov, A.S.,<br>Mitchell, A.C.,<br>Davis, V.W. | 1966 | "Compendium of Shock Wave Data",<br>UCRL - 50108, Lawrence Radiation Lab.,<br>Livermore, Ca., 1966.  |



- Walsh, J.M. , 1955 "Equation of State of Metals from Shock  
Christian, R.H. Wave Measurements",  
Phys. Rev., Vol. 97, No. 6, pp. 1544-  
56, 1955.
- Welsh, R.L. 1967 "Imploding Shocks and Detonations",  
J. Fluid Mech., Vol. 29, pp. 51-79,  
1967.
- Whitham, G.B. 197 "Linear and Nonlinear Waves",  
Pb. John Wiley & Sons, New York, 1974.
- Zel'dovich, Ya.B. , 1967 "Physics of Shock Waves and High-Tem-  
Raizer, Yu.P. perature Hydrodynamic Phenomena" ,  
Pb. Academic Press, New York, 1967.

APENDICE A

### Apendice A

En este apendice se dan las ecuaciones (III.9-10) escritas en la variable  $X=Z/V$ , necesaria para la integracion numerica en las proximidades del origen ( $V=0, Z=0$ ) y en la variable  $\gamma=1/Z$ , necesaria para integracion numerica que se inicia en el punto singular del infinite ( $V=V_c, Z \rightarrow \infty$ ). Tambien se da una tabla con los valores de  $\alpha_0(\gamma)$  y tablas con las distribuciones espaciales y temporales de velocidad, presion y densidad para  $\gamma=1.05, 1.4, 5/3, \gamma_c, 2, 3, 25$  e infinito en los casos cilindrico ( $j=1$ ) y esferico ( $j=2$ ). Estas distribuciones se representan graficamente para  $\gamma=1.4$  y  $3$ .

$$\frac{dV}{dX} = \frac{V-1}{X} \frac{XV\{(j+1)V+2\theta_0/\gamma\}-(V-1)(V-1+\theta_0)}{2X\{\theta_0(2-V)/\gamma-jV(V-1)\}+(\gamma-1)(V-1)\{\theta_0-j(V-1)\}}$$

$$\frac{d(\ln R)}{dX} = \frac{1}{X} \frac{(V-1)\{\theta_0-j(V-1)\}-2\theta_0 XV/\gamma}{2X\{\theta_0(2-V)/\gamma-jV(V-1)\}+(\gamma-1)(V-1)\{\theta_0-j(V-1)\}}$$

$$\frac{dY}{dV} = \frac{Y}{1-V} \frac{2(V-1+\theta_0/\gamma)+\theta_0 Y(V-1)\{(\gamma-3)V+2\}-Y(V-1)^2\{[2+(\gamma-1)j]V-2\}}{(j+1)V+2\theta_0/\gamma-YV(V-1)(V-1+\theta_0)}$$

$$\frac{d(\ln R)}{dV} = \frac{1}{V-1} \frac{YV(V-1)\{\theta_0-j(V-1)\}-2\theta_0/\gamma}{(j+1)V+2\theta_0/\gamma-YV(V-1)(V-1+\theta_0)}$$

Cuando  $\gamma \rightarrow \infty$  estas ecuaciones se pueden escribir como

$$\frac{d(\gamma V)}{d(X/\gamma^2)} = \frac{1}{(X/\gamma^2)} \frac{(1-\theta_0)-(X/\gamma^2)(\gamma V)\{(j+1)(\gamma V)+2\theta_0\}}{2(X/\gamma^2)\{2\theta_0+j(\gamma V)\}-(\theta_0+j)}$$

$$\frac{d\{\ln(R^\gamma)\}}{d(X/\gamma^2)} = \frac{1}{(X/\gamma^2)} \frac{\theta_0+j+2\theta_0(X/\gamma^2)(\gamma V)}{(\theta_0+j)-2(X/\gamma^2)\{2\theta_0+j(\gamma V)\}}$$

$$\frac{dY}{d(YV)} = -Y \frac{2+\theta_o Y\{(\gamma V)+2\}+Y\{j(\gamma V)-2\}}{(j+1)(\gamma V)+2\theta_o+Y(\gamma V)(\theta_o-1)}$$

$$\frac{d\{Ln(R^Y)\}}{d(YV)} = \frac{2\theta_o+Y(\gamma V)(\theta_o-1)}{(j+1)(\gamma V)+2\theta_o+Y(\gamma V)(\theta_o-1)}$$

Los coeficientes a, b, e y h que determinan la pendiente de (III.9) en el punto singular  $(V_1^*, Z_1^*)$  son, (ec. (III.37a)),

$$a = 2Z_1^{*2} + \theta_o Z_1^* \{2(\gamma-3)V_1^* - \gamma + 5\} - Z_1^* (V_1^* - 1) \{[2+(\gamma-1)j](3V_1^* - 1) - 4\}$$

$$b = 2Z_1^* \{(V_1^* - 1) + \theta_o / \gamma\}$$

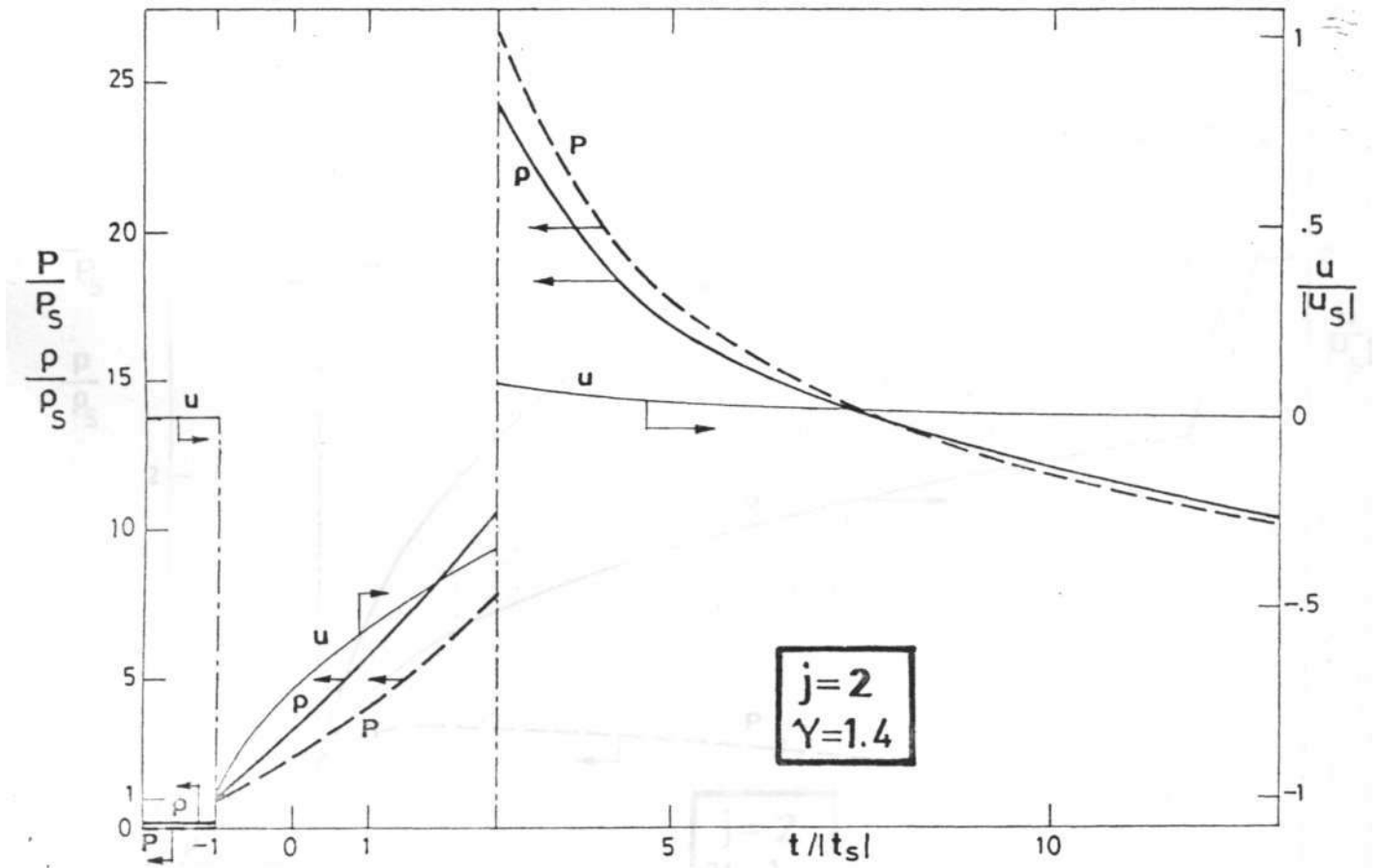
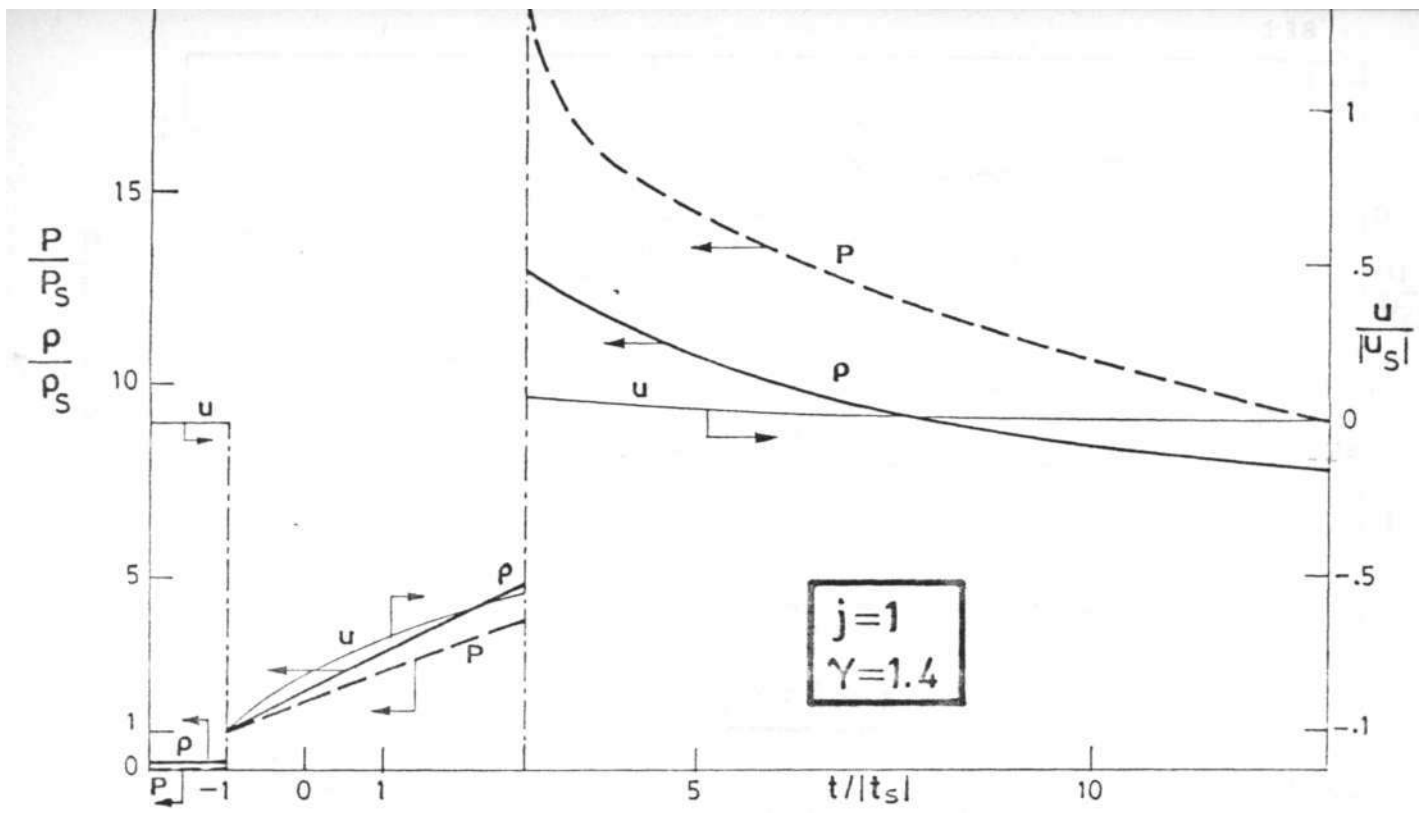
$$e = (V_1^* - 1) \{(j+1)V_1^* + 2\theta_o / \gamma\}$$

$$h = (V_1^* - 1) \{(j+1)Z_1^* - (V_1^* - 1)(3V_1^* - 1) - \theta_o(2V_1^* - 1)\}$$

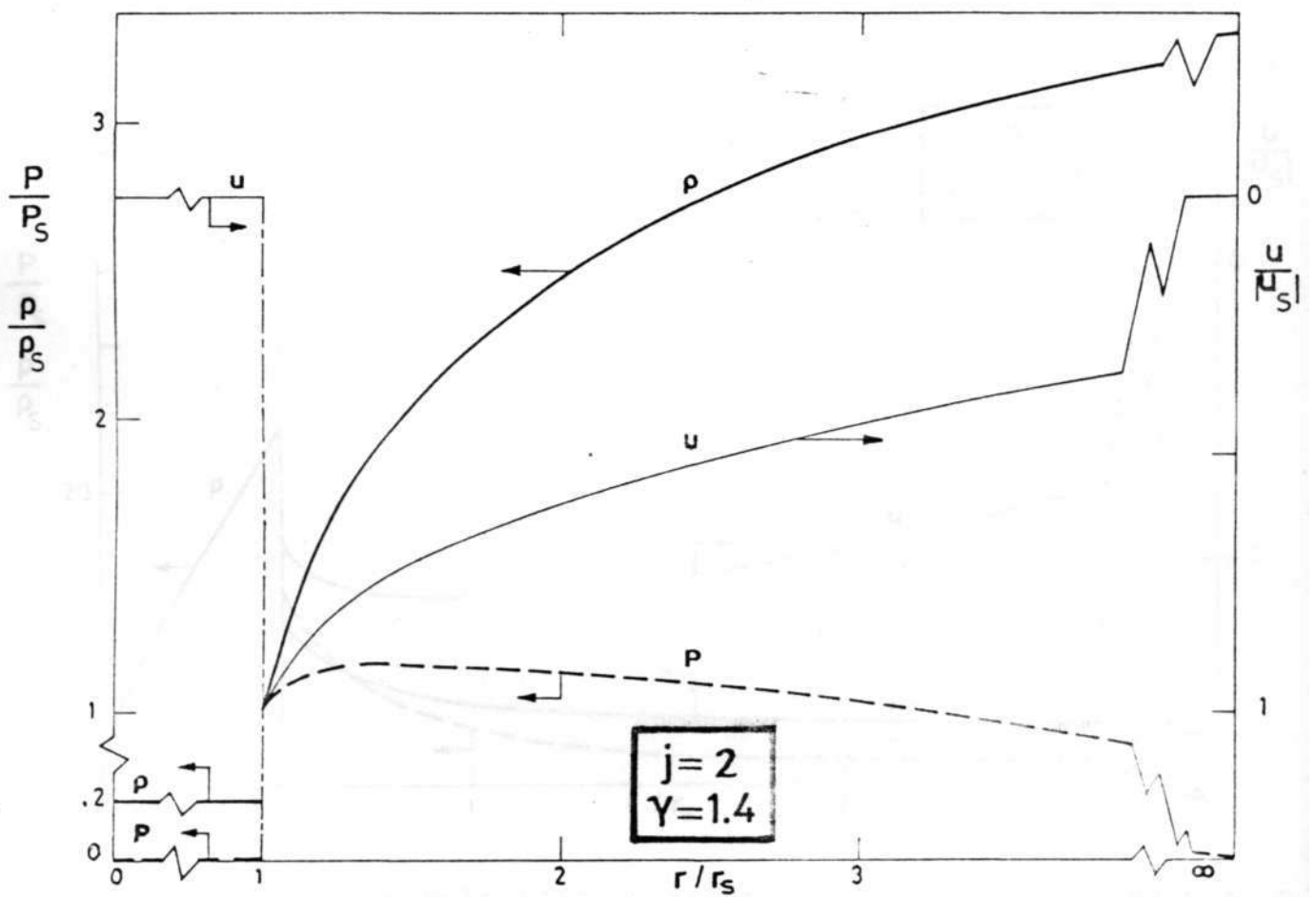
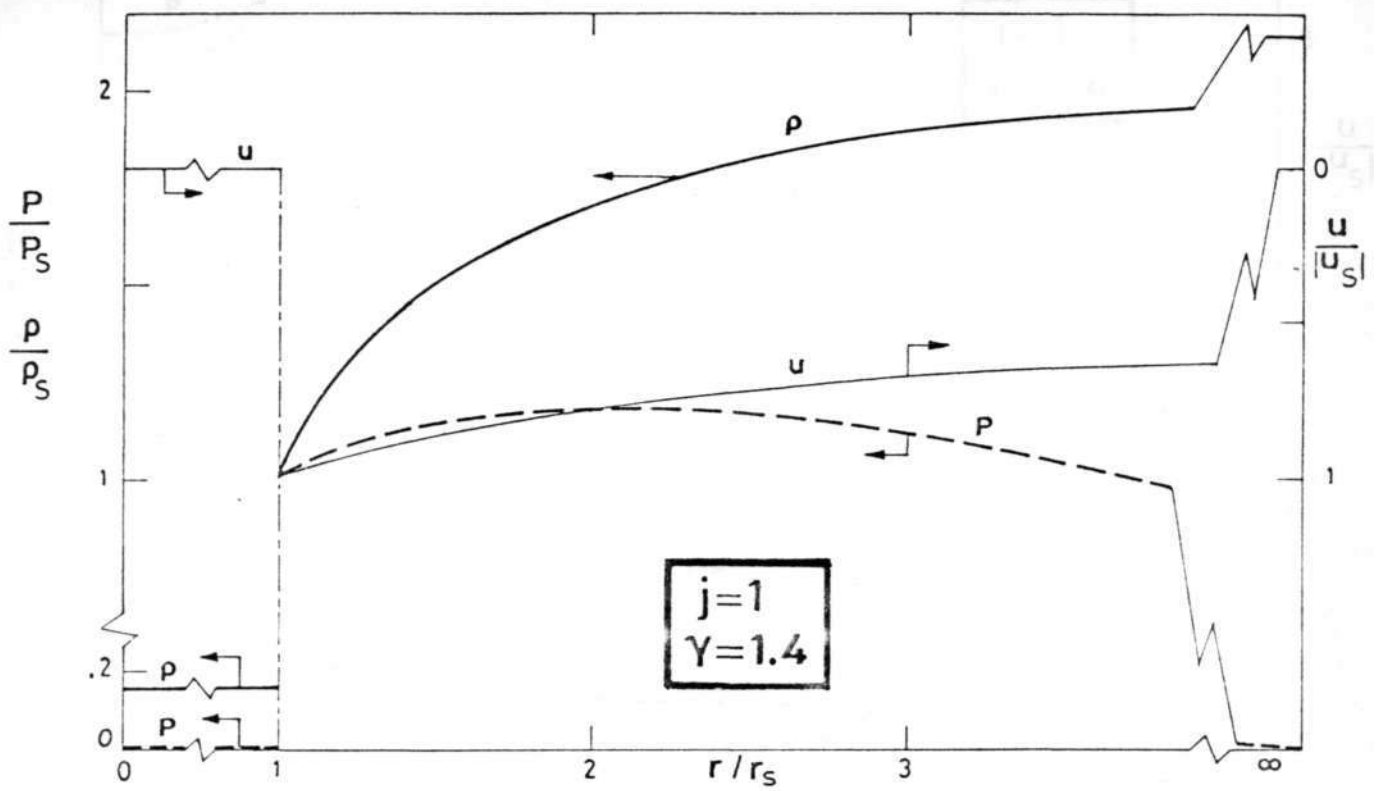
	SIMETRIA CILINDRICA ( $j=1$ )		SIMETRIA ESFERICA ( $j=2$ )	
$\gamma$	$\theta_0$	$\alpha_0$	$\theta_0$	$\alpha_0$
1.	0.	1.	0.	1.
1.001	- .0202847	.9801186	- .0401006	.9614455
1.01	- .0553973	.9475105	- .1088101	.9018677
1.05	- .1023892	.9071206	- .2015664	.832247
1.1	- .1296269	.885248	- .256329	.7959698
1.2	- .1612203	.861163	- .3207565	.7571418
1.3	- .1817213	.8462232	- .3628124	.7337767
1.4	- .1971414	.8353232	- .3943608	.7171745
1.5	- .2095591	.8267475	- .4195913	.7044281
1.6	- .2199591	.8196996	- .4405288	.6941895
5/3	- .2260532	.8156253	- .4526915	.6883774
1.7	- .2288931	.8137404	- .4583285	.6857166
1.8	- .2367055	.8085999	- .4737227	.6785537
$\gamma_c$	- .2442283	.803711	- .4833098	.674168
2.	- .2498245	.8001123	- .4991468	.6670461
2.1	- .2554172	.796548	- .5098004	.6623392
2.2	- .260499	.7933366	- .519375	.6581654
2.3	- .265143	.7904245	- .5280315	.6544368
2.4	- .2694077	.787769	- .5358987	.6510846
2.5	- .2733408	.7853357	- .5430815	.6480539
2.6	- .2769816	.7830966	- .5496664	.6453002
2.7	- .2803634	.7810283	- .5557257	.6427868
2.8	- .283514	.7791111	- .5613199	.6404837
2.9	- .2864572	.7773286	- .5665008	.6383655
3.	- .2892137	.7756666	- .5713126	.6364106
3.2	- .2942351	.7726571	- .5799757	.6329213
3.4	- .2986952	.7700036	- .5875568	.6298987
3.6	- .302685	.7676453	- .5942459	.6272558
4.	- .3095267	.7636347	- .6055088	.6228555
4.5	- .3164494	.759619	- .6166312	.6185703
5.	- .3220499	.7564011	- .6254243	.615224
5.5	- .3266762	.7537643	- .6325477	.6125395
6.	- .3305629	.7515616	- .6384332	.6103392
6.5	- .3338744	.7496958	- .6433768	.6085032
7.	- .3367302	.7480941	- .6475873	.6069481
7.5	- .3392183	.7467043	- .651215	.6056147
8.	- .3414056	.7454867	- .6543741	.6044582
8.5	- .3433433	.7444114	- .6571482	.6034463
9.	- .3450723	.7434545	- .6596049	.6025531
9.5	- .3466244	.7425976	- .6617944	.6017592
10.	- .3480251	.7418259	- .6637586	.6010487
25.	- .3642826	.732986	- .6856978	.5932261
50.	- .3698225	.7300216	- .6928201	.5907302
100.	- .3726158	.728536	- .6963448	.5895028
1000.	- .3751428	.7271972	- .6994957	.5884098
$\infty$	- .375425	.727048	- .699844	.5882893

Exponente  $\alpha_0$  en función de  $\gamma$ .

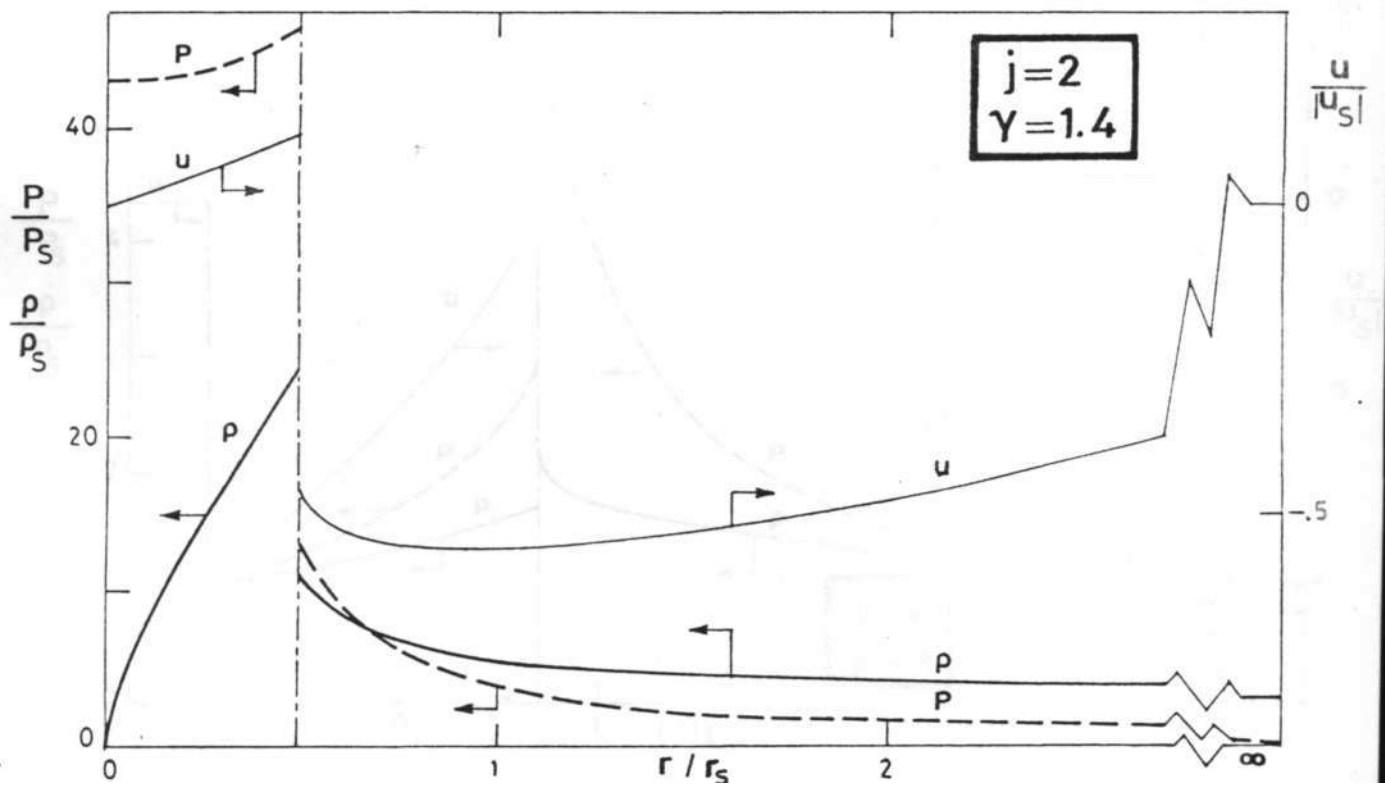
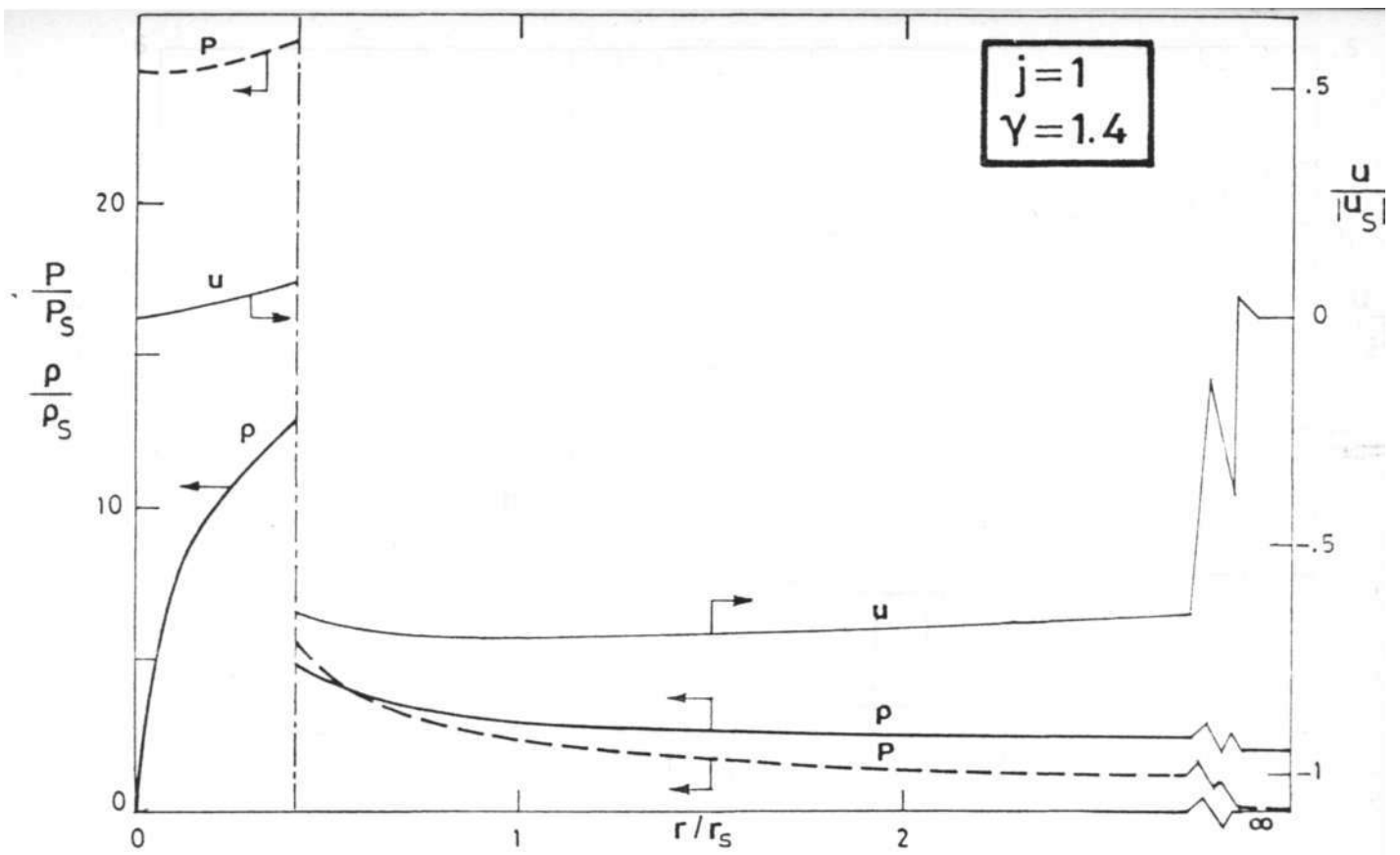
$$\gamma = 1.90923 \quad (j=1); \quad \gamma = 1.86977 \quad (j=2).$$



Distribuciones de velocidad, presión y densidad, observadas en un radio fijo, como función del tiempo.

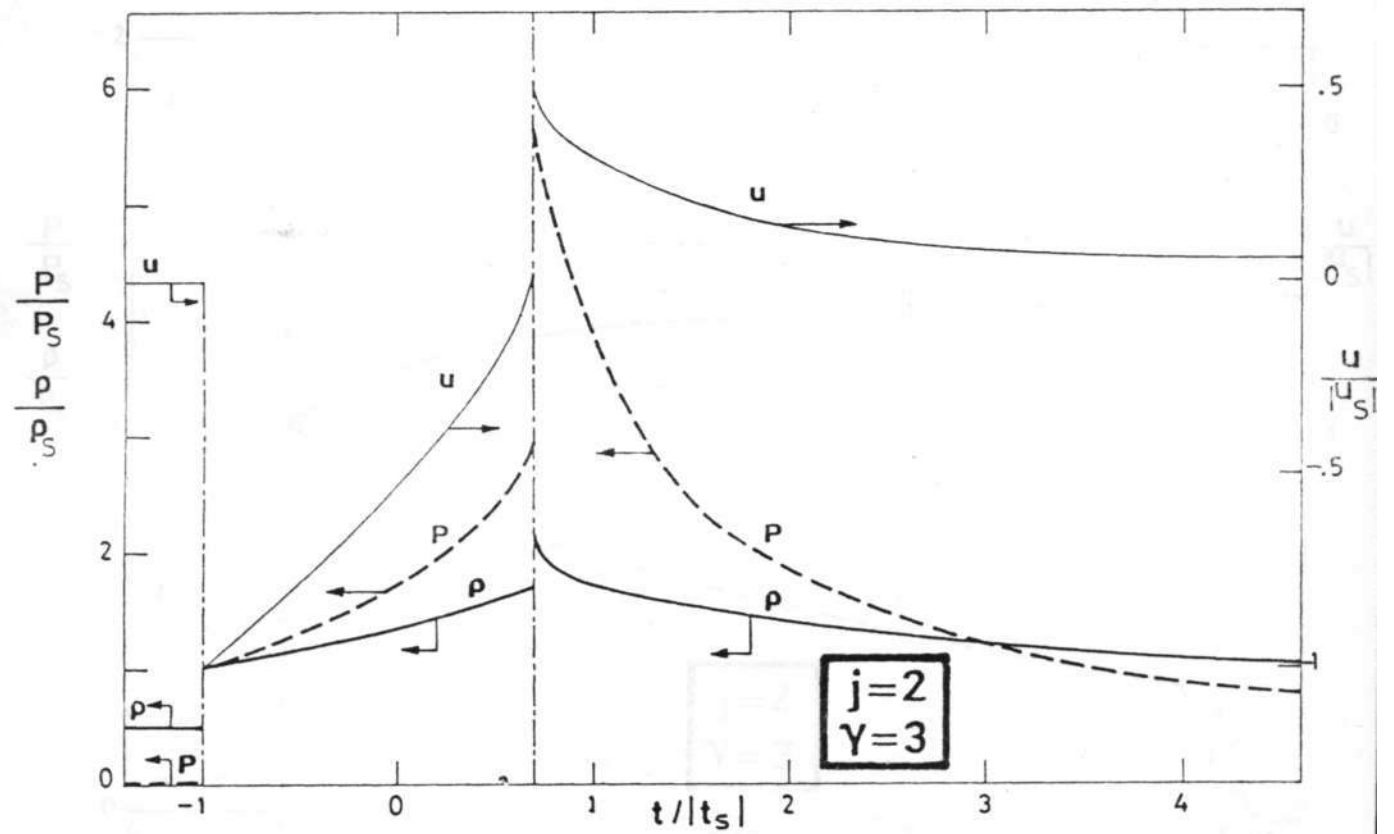
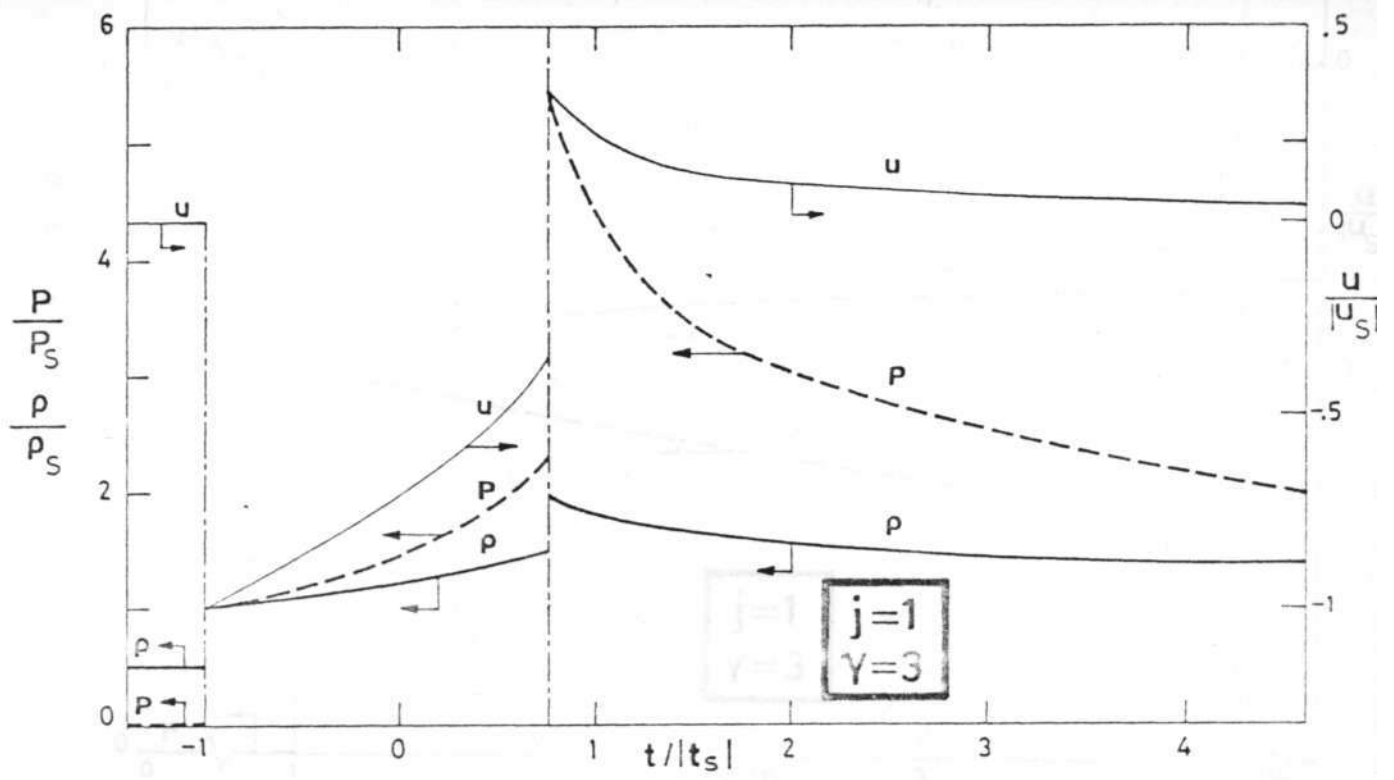


Distribuciones de velocidad, presión y densidad, observadas a lo largo del radio en un instante ( $t < 0$ ) anterior a la reflexión de la onda de choque en el centro (eje) de simetría.

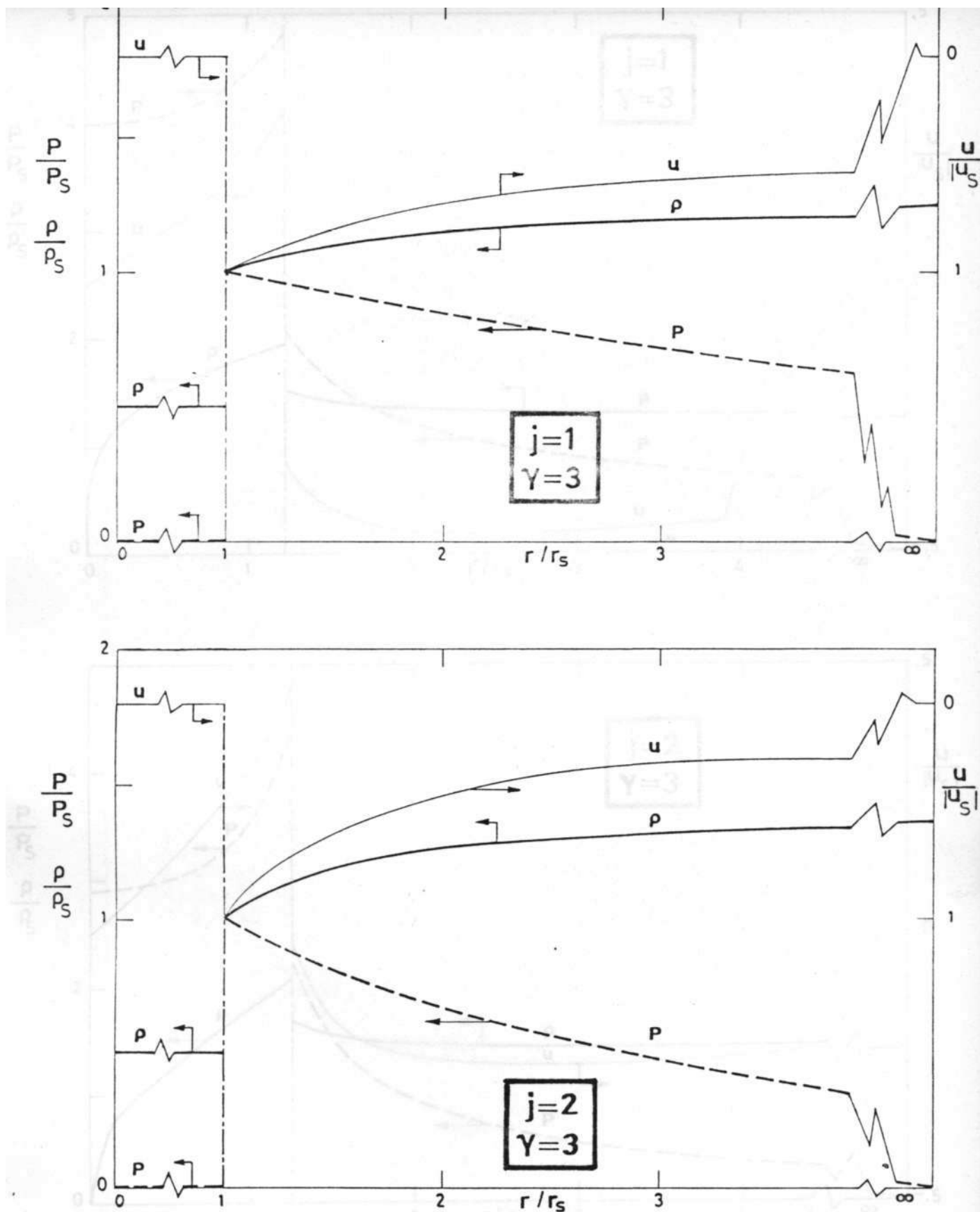


Distribuciones de velocidad, presión y densidad, observadas a lo largo del radio en un instante ( $t > 0$ ) posterior a la reflexión de la onda de choque en el centro (eje) de simetría.

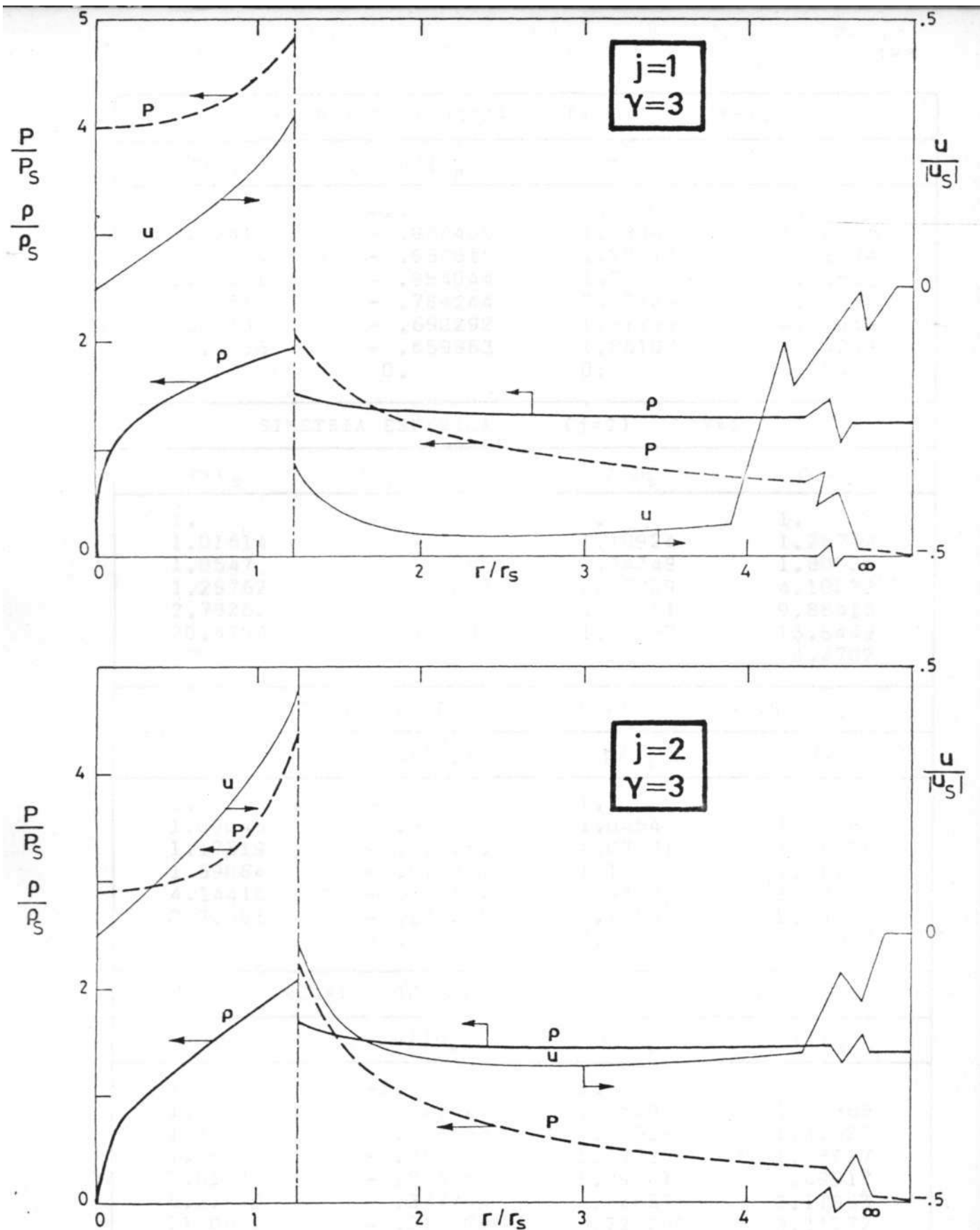




Distribuciones de velocidad, presión y densidad, observadas en un radio fijo, como función del tiempo.



Distribuciones de velocidad, presión y densidad, observadas a lo largo del radio en un instante ( $t < 0$ ) anterior a la reflexión de la onda de choque en el centro (eje) de simetría.



Distribuciones de velocidad, presión y densidad, observadas a lo largo del radio en un instante ( $t>0$ ) posterior a la reflexión de la onda de choque en el centro (eje) de simetría.

SIMETRIA CILINDRICA		(j=1)	$\gamma=1.05$
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
1.	-1.	1.	1.
1.02411	- .984485	1.08045	1.20666
1.07754	- .958615	1.23014	1.51774
1.38491	- .884044	1.7	2.52502
2.71612	- .784244	2.10129	3.91585
7.63109	- .690292	1.97718	4.71049
11.4606	- .659963	1.86103	4.84293
$\infty$	0.	0.	5.0749
SIMETRIA ESFERICA		(j=2)	$\gamma=1.05$
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
1.	-1.	1.	1.
1.01614	- .978981	1.10924	1.28732
1.0547	- .941305	1.34348	1.80526
1.28762	- .827868	2.27909	4.10073
2.78252	- .641138	3.38811	9.88415
20.4799	- .412289	1.99887	13.8449
$\infty$	0.	0.	14.2702
SIMETRIA CILINDRICA		(j=1)	$\gamma=1.4$
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
1.	-1.	1.	1.
1.09048	- .974251	1.0454	1.15566
1.17519	- .924251	1.07471	1.26095
1.59064	- .817853	1.11657	1.5617
4.14416	- .627507	.931774	1.97155
253.581	- .270325	.198812	2.14917
$\infty$	0.	0.	2.14918
SIMETRIA ESFERICA		(j=2)	$\gamma=1.4$
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
1.	-1.	1.	1.
1.0823	- .91762	1.05197	1.25888
1.1283	- .884665	1.11319	1.41527
1.28906	- .78571	1.17725	1.76817
2.0173	- .594969	1.09541	2.49917
5.21923	- .377794	.628575	3.11953
21.0032	- .213204	.221295	3.31272
$\infty$	0.	0.	3.31273

Distribuciones radiales ( $t < 0$ ) de velocidad, presión y densidad.

SIMETRIA CILINDRICA		(j=1)	$\gamma=5/3$
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
1.	-1.	1.	1.
1.10731	- .946375	1.02678	1.11302
1.20405	- .908078	1.0391	1.18719
1.62044	- .800184	1.03297	1.37567
3.04618	- .648179	.891985	1.58483
7.71456	- .509774	.630954	1.70075
304.101	- .216494	.123842	1.75385
$\infty$	0.	0.	1.75388
SIMETRIA ESFERICA		(j=2)	$\gamma=5/3$
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
1.	-1.	1.	1.
1.05834	- .939849	1.03189	1.13275
1.15255	- .863286	1.05921	1.29749
1.42373	- .719938	1.04986	1.60175
1.63931	- .647656	1.00496	1.75125
4.48614	- .357996	.518334	2.2414
$\infty$	0.	0.	2.38743
SIMETRIA CILINDRICA		(j=1)	$\gamma=1.90923$
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
1.	-1.	1.	1.
1.14809	- .927287	1.0172	1.10794
1.22147	- .898703	1.01883	1.14695
1.41483	- .838621	1.0109	1.22402
1.72202	- .771339	.980876	1.30272
2.55892	- .666047	.882567	1.40818
4.85261	- .545321	.694106	1.49614
$\infty$	0.	0.	1.56663
SIMETRIA ESFERICA		(j=2)	$\gamma=1.86977$
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
1.	-1.	1.	1.
1.11092	- .891843	1.02841	1.17546
1.16524	- .850062	1.03112	1.24112
1.35568	- .73904	1.00896	1.41181
1.90172	- .565924	.866026	1.66309
2.34411	- .490113	.755614	1.76259
4.45178	- .333835	.451729	1.92822
9.55573	- .223379	.225446	1.99842
$\infty$	0.	0.	2.02967

Distribuciones radiales ( $t < 0$ ) de velocidad, presión y densidad.

SIMETRIA CILINDRICA		(j=1)	$\gamma=2$
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
1.	-1.	1.	1.
1.15163	-.925023	1.0129	1.09966
1.22664	-.895608	1.01273	1.1356
1.36565	-.850221	1.00563	1.18824
2.27807	-.688514	.899615	1.34892
4.22035	-.56075	.717262	1.4402
5.92659	-.507164	.619916	1.46701
10.3416	-.434739	.480018	1.49236
123.155	-.23077	.142198	1.51639
$\infty$	0.	0.	1.51659
SIMETRIA ESFERICA		(j=2)	$\gamma=2$
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
1.	-1.	1.	1.
1.03082	-.965702	1.0085	1.04812
1.06861	-.92783	1.01498	1.10002
1.11432	-.887506	1.01938	1.15545
1.17175	-.842508	1.01636	1.21366
1.84028	-.569176	.848593	1.55257
3.24753	-.386211	.554109	1.74013
$\infty$	0.	0.	1.88524
SIMETRIA CILINDRICA		(j=1)	$\gamma=3$
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
1.	-1.	1.	1.
1.04797	-.971124	.996667	1.01645
1.1049	-.94029	.991102	1.03335
1.26032	-.870729	.970253	1.06926
2.18749	-.658866	.819627	1.16205
3.59424	-.535653	.659496	1.20335
9.06856	-.387937	.408267	1.2357
125.237	-.177069	9.15952E-2	1.2495
$\infty$	0.	0.	1.25
SIMETRIA ESFERICA		(j=2)	$\gamma=3$
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
1.	-1.	1.	1.
1.08225	-.90542	.982347	1.05095
1.2005	-.799882	.944045	1.10474
1.583555	-.591614	.797475	1.20305
4.08204	-.264945	.329962	1.3315
7.91484	-.170956	.160771	1.3551
$\infty$	0.	0.	1.3664

Distribuciones radiales ( $t < 0$ ) de velocidad, presión y densidad.

SIMETRIA CILINDRICA		(j=1)	$\gamma=25$
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
1.	-1.	1.	1.
1.20306	-.860321	.919199	1.0024
2.76547	-.476644	.582343	1.00916
6.95294	-.291315	.318515	1.01212
12.4196	-.22613	.212225	1.01283
$\infty$	0.	0.	1.01345

SIMETRIA ESFERICA		(j=2)	$\gamma=25$
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
1.	-1.	1.	1.
1.15583	-.773946	.855658	1.00225
2.99136	-.17924	.269055	1.00918
12.996	-4.31942E-2	3.75286E-2	1.0111
30.1285	-2.33556E-2	1.18875E-2	1.01125
$\infty$	0.	0.	1.01129

SIMETRIA CILINDRICA		(j=1)	$\gamma \rightarrow \infty$
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$(\rho/\rho_s)^\gamma$
1.	-1.	1.	1.
1.05481	-.954666	.973543	1.01335
1.20573	-.851743	.908607	1.04564
1.47418	-.722096	.81495	1.09066
2.25465	-.524137	.635428	1.16997
3.71889	-.378878	.460709	1.23516
4.99446	-.32071	.37696	1.26112
12.7834	-.205134	.192411	1.30364
$\infty$	0.	0.	1.32156

SIMETRIA ESFERICA		(j=2)	$\gamma \rightarrow \infty$
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$(\rho/\rho_s)^\gamma$
1.	-1.	1.	1.
1.24051	-.667732	.769427	1.04034
1.53571	-.453985	.589602	1.07482
2.34074	-.224864	.342443	1.12608
4.71196	-8.77424E-2	.133687	1.17048
13.4804	-3.27798E-2	3.12054E-2	1.18977
$\infty$	0.	0.	1.19182

Distribuciones radiales ( $t < 0$ ) de velocidad, presión y densidad.

SIMETRIA CILINDRICA (j=1)		$\gamma=1.05$	
$t/ t_s $	$u/ u_s $	$P/P_s$	$\rho/\rho_s$
-1.	-1.	1.	1.
- .698389	- .914016	1.81723	2.52502
- .332368	- .868728	2.57839	3.91585
- .106426	- .849963	2.99765	4.71048
-6.79735E-2	- .847172	3.06659	4.84292
9.97870E-3	- .841802	3.20402	5.10853
4.96236E-2	- .839204	3.27306	5.24268
1.34993	- .782414	5.31117	9.39243
9.98797	- .668368	15.5379	33.5853
22.6892	- .613028	27.6778	66.3487
29.0662	- .596249	33.2204	82.256
29.0662	3.48374E-3	1279.34	1634.49
56.0892	1.78823E-3	1129.94	1433.9
168.628	5.92956E-4	920.375	1154.83
727.422	1.37407E-4	701.452	867.023
1780.45	5.61385E-5	593.998	727.487
5276.22	1.89437E-5	485.451	587.951
10050.2	9.94522E-6	430.696	518.195
$r/r_s$	$u/ u_s $	$P/P_s$	$\rho/\rho_s$
$\infty$	0.	0.	5.0749
65.3253	- .548739	1.36146	5.10853
15.2464	- .634927	1.87356	5.24268
0.761716	- .804525	5.6156	9.39243
0.12398	- .827649	23.8261	33.5853
7.42769E-2	- .82258	39.1748	53.3536
4.70468E-2	- .815354	62.1213	82.256
4.70468E-2	4.76392E-3	2392.34	1634.49
3.96087E-2	3.99472E-3	2390.24	1573.44
2.59152E-2	2.59931E-3	2387.4	1433.9
1.61728E-2	1.61847E-3	2386.24	1294.36
9.54784E-3	9.54681E-4	2385.81	1154.83
5.26286E-3	5.26082E-4	2385.67	1015.29
2.53521E-3	2.53403E-4	2385.61	867.023
1.12558E-3	1.12504E-4	2385.61	727.487
4.20149E-4	4.19944E-5	2385.61	587.951
2.34178E-4	2.34064E-5	2385.61	518.195
0.	0.	2385.61	0.

Distribuciones temporales (radio fijo) y espaciales (tiempo fijo) de velocidad, presión y densidad.



SIMETRIA ESFERICA (j=2)		$\gamma=1.05$	
$t/ t_s $	$u/ u_s $	$P/P_s$	$\rho/\rho_s$
-1.	-1.	1.	1.
- .980942	- .982148	1.11643	1.28732
- .938009	- .951462	1.37264	1.80525
- .738043	- .871148	2.52361	4.10073
- .292401	- .788018	5.11831	9.88414
-2.65675E-2	- .757745	6.75189	13.8449
4.22513E-2	- .751097	7.1859	14.9295
2.30059	- .633631	23.7369	62.4097
17.7232	- .459944	210.637	820.463
29.6725	- .415015	413.902	1812.58
38.1773	- .393694	582.178	2703.46
38.1773	3.47743E-3	18644.4	48646.8
63.3935	2.07846E-3	15684.2	40282.9
100.741	1.30438E-3	13414.4	33962.4
219.115	5.98884E-4	10331.2	25535.1
358.371	3.66087E-4	8758.52	21321.2
660.45	1.98626E-4	7134.16	17041.8
1433.78	9.14923E-5	5500.36	12827.9
$r/r_s$	$u/ u_s $	$P/P_s$	$\rho/\rho_s$
$\infty$	0.	0.	14.2702
13.92	- .44175	2.48566	14.9295
0.499874	- .728678	31.3923	62.4097
9.13912E-2	- .744991	552.621	820.463
5.95164E-2	- .732918	1290.86	1812.58
4.82555E-2	- .725289	1975.87	2703.46
4.82555E-2	6.40635E-3	63277.9	48646.8
3.16412E-2	4.16907E-3	63104.1	40282.9
2.15198E-2	2.82778E-3	63045.8	33962.4
1.59397E-2	2.09267E-3	63026.8	29748.7
1.12715E-2	1.47910E-3	63016.9	25535.1
7.48452E-3	9.81930E-4	63011.9	21321.2
4.49983E-3	5.90299E-4	63010.7	17041.8
3.33447E-3	4.37418E-4	63009.8	14934.8
2.36062E-3	3.09666E-4	63009.7	12827.9
0.94504E-3	0.97648E-4	63009.5	0.

Distribuciones temporales (radio fijo) y espaciales (tiempo fijo) de velocidad, presión y densidad.

SIMETRIA CILINDRICA		(j=1)	$\gamma=1.4$
$t/ t_s $	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
-1.	-1.	1.	1.
- .901502	- .971058	1.08172	1.15566
- .573707	- .896218	1.34079	1.5617
-1.32413E-3	- .805078	1.76338	2.14917
8.67569E-2	- .793513	1.82679	2.23388
.258638	- .77222	1.95007	2.39677
.818072	- .711532	2.35146	2.91337
1.63388	- .63746	2.95602	3.65875
2.28944	- .584427	3.47831	4.27483
2.63117	- .557875	3.77102	4.60938
2.80581	- .544426	3.9278	4.78547
<hr/>			
2.80581	6.86574E-2	18.188	12.9572
3.3456	5.45125E-2	16.8873	12.2023
5.11024	3.41385E-2	14.4061	10.7058
8.68763	1.96702E-2	11.2313	8.70934
16.3511	1.03677E-2	9.70133	7.71267
97.9319	1.72564E-3	5.37311	4.71967
4040.82	4.77571E-5	1.58413	1.70317
<hr/>			
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
$\infty$	0.	0.	2.14918
7.70654	- .53054	.816613	2.23388
3.09451	- .618053	1.24916	2.39677
1.18263	- .688388	2.20098	2.91337
.663578	- .691139	3.47482	3.65875
.500621	- .669837	4.56927	4.27483
.422403	- .645243	5.51719	4.78547
<hr/>			
.422403	8.13715E-2	25.5478	12.9572
.364665	6.65067E-2	25.1361	12.2023
.255989	4.46589E-2	24.6533	10.7058
.164329	2.80817E-2	24.4791	8.70934
9.68938E-2	1.64257E-2	24.351	7.71267
5.03021E-2	8.50587E-3	24.3249	6.21617
2.17237E-2	3.67119E-3	24.3188	4.71967
6.65155E-3	1.12397E-3	24.3156	3.27917
2.94504E-3	4.97648E-4	24.3148	2.4515
9.71473E-4	1.87473E-4	24.3144	1.70317
0.	0.	24.3142	0.

Distribuciones temporales (radio fijo) y espaciales (tiempo fijo) de velocidad, presion y densidad.

SIMETRIA ESFERICA		(j=2)	$\gamma=1.4$
$t/ t_s $	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
-1.	-1.	1.	1.
-.935655	-.967391	1.093	1.18288
-.845088	-.927797	1.22438	1.41527
-.375873	-.784663	1.90526	2.49917
-1.43304E-2	-.708357	2.44279	3.31272
6.83522E-2	-.693128	2.56862	3.50033
.37328	-.641855	3.04447	4.20158
.933726	-.561184	3.98116	5.54585
1.48354	-.49141	4.95111	6.8949
2.32279	-.391257	6.91184	9.4384
2.68953	-.345331	7.97152	10.7232
2.68953	9.51077E-2	26.663	24.1767
3.88576	6.13977E-2	20.8243	19.535
5.29743	4.38170E-2	17.1496	16.4943
7.73143	2.95287E-2	13.695	13.5462
12.5462	1.80315E-2	10.3534	10.5973
24.075	9.35778E-3	7.14586	7.65034
466.346	4.82302E-4	1.33864	1.75398
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
$\infty$	0.	0.	3.31273
6.84992	-.324528	.563089	3.50033
2.02733	-.485733	1.74354	4.20158
1.05041	-.550405	3.8297	5.54585
.753612	-.549404	6.18868	6.8949
.546395	-.496572	11.1334	9.4384
.491866	-.456835	13.9504	10.7232
.491866	.125817	46.6612	24.1767
.377783	9.01304E-2	44.8753	19.535
.302496	7.02144E-2	44.0374	16.4943
.230655	5.26583E-2	43.5519	13.5462
.162996	3.68739E-2	43.2967	10.5973
.102135	2.30099E-2	43.2054	7.65034
5.06297E-2	1.13904E-2	43.2037	4.70217
1.21919E-2	2.74219E-3	43.2024	1.75398
0.	0.	43.2024	0.

Distribuciones temporales (radio fijo) y espaciales (tiempo fijo) de velocidad, presión y densidad.

SIMETRIA CILINDRICA (j=1) $\gamma=5/3$			
$t/ t_s $	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
-1.	-1.	1.	1.
- .882518	- .968439	1.07516	1.11303
- .796387	- .947011	1.13011	1.18719
- .255204	- .833781	1.47594	1.58493
-9.02998E-4	- .788391	1.64232	1.75386
7.63003E-2	- .775212	1.69383	1.80426
.288641	- .740011	1.83859	1.94173
.790506	- .660356	2.20685	2.26786
1.14587	- .604192	2.50233	2.50888
1.58648	- .530099	2.9407	2.83774
1.69541	- .510081	3.06806	2.92749
1.69541	.1255	10.3054	5.74277
2.14335	9.31716E-2	9.15462	5.29927
3.20732	5.89121E-2	7.67304	4.69502
9.77738	1.85914E-2	4.99172	3.48701
20.4674	8.84685E-3	3.79429	2.88276
170.805	1.05879E-3	1.73364	1.67376
3592.75	5.03355E-5	.563908	.767578
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
$\infty$	0.	0.	1.75388
8.15531	- .482377	.655846	1.80426
2.75515	- .588494	1.16277	1.94173
1.21135	- .632346	2.02361	2.26786
.894884	- .619553	2.63118	2.50888
.77085	- .600865	3.05737	2.67468
.686309	- .577181	3.48628	2.83774
.650125	- .562227	3.72743	2.92749
.650125	.13833	12.5201	5.74277
.536973	.107233	12.1263	5.29927
.386525	7.30337E-2	11.7925	4.69502
.256198	4.71006E-2	11.6348	4.09101
.155722	2.83063E-2	11.5716	3.48701
8.52439E-2	1.54353E-2	11.5501	2.88276
4.03216E-2	7.29349E-3	11.5462	2.27793
1.51048E-2	2.73166E-3	11.5441	1.67376
3.72895E-3	6.74354E-4	11.5431	1.07925
1.25922E-3	2.27722E-4	11.5417	.767578
0.	0.	11.541	0.

Distribuciones temporales (radio fijo) y espaciales (tiempo fijo) de velocidad, presión y densidad.

SIMETRIA ESFERICA (j=2) $\gamma=5/3$			
$t/ t_s $	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
-1.	-1.	1.	1.
- .920927	- .96429	1.08626	1.13275
- .81363	- .920597	1.20451	1.2975
- .48771	- .810069	1.57219	1.75126
- .112987	- .706283	2.01748	2.24141
6.62858E-5	- .677779	2.15847	2.38751
.163446	- .637827	2.36917	2.59901
.60206	- .535653	2.98995	3.18001
.836941	- .481153	3.36952	3.50751
1.12738	- .410625	3.91362	3.94386
1.54784	- .288388	5.01309	4.71844
1.54784	.188947	12.7824	8.06778
1.87721	.14621	10.7306	7.12403
2.79432	9.15906E-2	7.90596	5.71727
3.99957	6.21697E-2	6.17842	4.77952
11.5692	2.09548E-2	3.12382	2.90351
112.005	2.15572E-3	.756265	1.02725
425.161	5.67873E-4	.329196	.558502
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
$\infty$	0.	0.	2.38743
752.385	-3.38025E-2	5.36869E-3	2.38751
3.47933	- .362721	.766188	2.59901
1.41805	- .457314	2.17934	3.18001
1.13036	- .45519	3.0157	3.50751
.920781	- .426257	4.21748	3.94386
.808429	- .382516	5.40174	4.34237
.740284	- .330446	6.58191	4.71844
.740284	.216502	16.7825	8.06778
.648215	.177914	15.8888	7.12403
.492939	.12616	15.0001	5.71727
.385112	9.57591E-2	14.6582	4.77952
.280821	6.86537E-2	14.4629	3.84151
.185373	4.49398E-2	14.3676	2.90351
.103209	2.49397E-2	14.3311	1.96551
3.88465E-2	9.37952E-3	14.3169	1.02725
1.55083E-2	3.74428E-3	14.3116	.558502
0.	0.	14.3081	0.

Distribuciones temporales (radio fijo) y espaciales (tiempo fijo) de velocidad, presión y densidad.

SIMETRIA CILINDRICA (j=1) $\gamma=1.90923$			
$t/ t_s $	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
-1.	-1.	1.	1.
- .842129	- .959094	1.08818	1.10794
- .649365	- .912792	1.19762	1.22402
- .31066	- .837844	1.39658	1.40818
- .140117	- .802023	1.50139	1.49614
9.01414E-3	- .771278	1.59649	1.57187
.140524	- .744376	1.68362	1.63831
.257291	- .720504	1.76406	1.69742
.676358	- .632733	2.08584	1.91549
1.08567	- .536772	2.48713	2.15382
1.29433	- .477857	2.76167	2.29948
1.29433	.175834	8.05747	3.88506
1.80318	.114057	6.67752	3.47958
3.22275	5.96344E-2	5.12455	2.9728
6.90425	2.71648E-2	3.75076	2.46602
12.8122	1.45620E-2	2.93421	2.12816
26.6071	6.99938E-3	2.20018	1.79031
3518.96	5.28889E-5	.323013	.565575
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
$\infty$	0.	0.	1.56663
44.02	- .306045	.251372	1.57187
4.8413	- .506414	.77924	1.63831
2.97748	- .551972	1.03528	1.69742
1.88287	- .582386	1.401	1.79865
1.36927	- .585984	1.789	1.91549
1.13793	- .575217	2.10555	2.01264
1.04616	- .565382	2.2841	2.06733
.936075	- .545502	2.56869	2.15382
.86462	- .524611	2.81968	2.22923
.812734	- .502679	3.05603	2.29948
.812734	.184968	8.91632	3.88506
.622612	.128051	8.41649	3.47953
.390421	7.50337E-2	8.11286	2.9728
.128763	2.40233E-2	7.98581	2.12816
7.15671E-2	1.33282E-2	7.97774	1.79031
6.96197E-3	1.29573E-3	7.97295	.903432
0.	0.	7.9687	0.

Distribuciones temporales (radio fijo) y espaciales (tiempo fijo) de velocidad, presión y densidad.

SIMETRIA ESFERICA (j=2)		$\gamma=1.86977$	
$\tau/ t_s $	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
-1.	-1.	1.	1.
- .855536	- .938355	1.13847	1.17546
- .636753	- .856132	1.354	1.41181
- .385424	- .772098	1.61198	1.66309
- .10915	- .687029	1.91322	1.92822
-3.51532E-2	- .664987	1.99795	1.99842
3.19760E-2	- .645147	2.07659	2.06204
.200654	- .595593	2.28288	2.22238
.406053	- .534874	2.55506	2.42069
.899745	- .375412	3.37659	2.94135
1.21016	- .239521	4.22182	3.3788
1.21016	.256921	9.71901	5.18482
1.72953	.159997	6.91247	4.18617
2.88689	8.94205E-2	4.65984	3.25529
4.95975	5.06671E-2	3.20125	2.55714
9.47257	2.62367E-2	2.08047	1.93655
23.5952	1.04901E-2	1.14389	1.31596
435.663	5.67564E-4	.170781	.385084
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
$\infty$	0.	0.	2.02967
10.1859	- .210127	.220291	2.06204
4.95329	- .289413	.45785	2.12003
2.95302	- .352911	.801518	2.22238
2.09964	- .388957	1.19849	2.34935
1.83604	- .398763	1.42013	2.42069
1.31533	- .39839	2.26139	2.68286
1.07382	- .362709	3.15195	2.94135
.954815	- .314668	3.95064	3.1597
.905432	- .279985	4.44563	3.29093
.879327	- .25488	4.78063	3.3788
.879327	.273396	11.0054	5.18482
.691188	.191265	9.87832	4.18617
.48932	.126317	9.2986	3.25529
.339738	8.53746E-2	9.0892	2.55714
.11871	2.93826E-2	8.97439	1.31596
4.27895E-2	1.05811E-2	8.96652	.695373
0.	0.	8.95491	0.

Distribuciones temporales (radio fijo) y espaciales (radio fijo) de velocidad, presión y densidad.



SIMETRIA CILINDRICA (j=1)		$\gamma=2$	
$t/ t_s $	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
-1.	-1.	1.	1.
-.896564	-.972981	1.0554	1.06531
-.774672	-.942501	1.12156	1.1356
-.588491	-.898174	1.22474	1.23446
-.165358	-.80352	1.47276	1.4402
-5.39439E-2	-.779288	1.54239	1.49236
-2.43950E-3	-.768114	1.57539	1.51639
9.31536E-2	-.747353	1.6381	1.56094
.481103	-.668723	2.04764	1.81131
.834243	-.575683	2.23193	1.92553
1.19968	-.465921	2.68929	2.15389
1.19968	.193248	7.56267	3.497
1.48521	.144386	6.63098	3.25025
3.20877	6.01670E-2	4.59612	2.64231
4.9819	3.81087E-2	3.8201	2.37819
8.25805	2.28072E-2	3.10788	2.11406
14.7494	1.27262E-2	2.4602	1.84993
3523.09	5.31829E-5	.275313	.529317
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
$\infty$	0.	0.	1.51659
11.6394	-.410277	.471517	1.53921
3.94417	-.517018	.854843	1.60146
1.79575	-.577736	1.52834	1.81131
1.15604	-.555202	2.07594	1.92553
.948884	-.516545	2.56466	2.06302
.864447	-.483189	2.89232	2.15389
.864447	.20041	8.13362	3.497
.796166	.176898	7.9285	3.36997
.728702	.156266	7.76703	3.25025
.393435	7.59573E-2	7.32509	2.64231
.276698	5.25320E-2	7.25899	2.37819
.184669	3.47812E-2	7.22786	2.11406
.116104	2.17932E-2	7.2147	1.84993
5.20057E-2	9.74702E-3	7.2089	1.47026
6.44420E-3	1.20745E-3	7.20773	.809943
1.45232E-3	2.72118E-4	7.20773	.529317
0.	0.	7.20773	0.

Distribuciones temporales (radio fijo) y espaciales (tiempo fijo) de velocidad, presión y densidad.



SIMETRIA ESFERICA (j=2) $\gamma=2$			
$t/ t_s $	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
-1.	-1.	1.	1.
- .905306	- .959077	1.0845	1.10002
- .788511	- .911869	1.19059	1.21366
- .400775	- .771724	1.56002	1.55257
- .171043	- .695287	1.79587	1.74013
9.87316E-3	- .636322	1.99433	1.88542
.257667	- .555045	2.29169	2.08517
.420024	- .499968	2.50853	2.21899
.681346	- .404215	2.91785	2.44784
.944198	- .287631	3.4793	2.71918
1.0773	- .208081	3.91336	2.90209
1.0773	.29719	8.60696	4.24097
1.64317	.169553	5.68005	3.32816
2.65182	9.85226E-2	3.89829	2.66301
5.23848	4.83003E-2	2.40896	1.99785
14.2416	1.75663E-2	1.22558	1.33269
29.1632	8.56371E-3	.759315	1.00011
450.577	5.53899E-4	.122566	.33496
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
$\infty$	0.	0.	1.88524
21.7666	- .136749	9.21064E-2	1.88542
2.47088	- .353377	.928912	2.08517
1.78358	- .37455	1.40784	2.21899
1.62716	- .375084	1.59777	2.27136
1.29167	- .355739	2.25996	2.44784
1.13191	- .321551	2.83435	2.59336
1.03904	- .282185	3.34877	2.71918
.975242	- .237095	3.86113	2.8421
.951549	- .213304	4.11227	2.90209
.951549	.304649	9.04445	4.24097
.718009	.20004	7.90636	3.32816
.521767	.136319	7.46302	2.66301
.331327	8.38323E-2	7.25695	1.99785
.170029	4.25366E-2	7.18633	1.33269
.105411	2.63260E-2	7.17576	1.00011
1.69752E-2	4.23657E-3	7.17031	.33496
0.	0.	7.16945	0.

Distribuciones temporales (radio fijo) y espaciales (tiempo fijo) de velocidad, presión y densidad.

SIMETRIA CILINDRICA (j=1) $\gamma=3$			
$t/ t_s $	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
-1.	-1.	1.	1.
-.879318	-.967814	1.04997	1.03335
-.742092	-.930987	1.10919	1.06926
-.364534	-.826255	1.28899	1.16205
-5.82813E-2	-.733996	1.46154	1.2357
-1.97503E-3	-.715872	1.49713	1.2495
.17375	-.655898	1.61892	1.2938
.406303	-.562733	1.81768	1.3579
.605903	-.466216	2.05302	1.4239
.726571	-.38636	2.26317	1.4759
.76371	-.355242	2.35051	1.496
-----			
.76371	.339317	5.44074	1.95185
1.05359	.213708	4.30022	1.7933
1.90105	.106819	3.08836	1.58925
4.20467	4.64483E-2	2.11133	1.38185
11.0795	1.74444E-2	1.35835	1.1745
35.7346	5.39732E-3	.80224	.96715
153.526	1.25590E-3	.417011	.75975
3864.37	4.98941E-5	9.80827E-2	.44545
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
$\infty$	0.	0.	1.25
10.4335	-.354846	.394212	1.26205
3.88655	-.442921	.738252	1.2938
2.01095	-.459784	1.21345	1.3579
1.47497	-.416652	1.6397	1.4239
1.28116	-.359644	1.961	1.4759
1.23256	-.334396	2.08275	1.496
-----			
1.23256	.319405	4.82095	1.95185
.960319	.216226	4.40212	1.7933
.607568	.123378	4.12005	1.58925
.32824	6.41052E-2	4.02165	1.38185
.154811	2.99210E-2	3.99626	1.1745
6.24195E-2	1.20389E-2	3.99139	.96715
2.01489E-2	3.88500E-3	3.99074	.75975
4.40082E-3	8.48520E-4	3.9905	.54915
1.65053E-3	3.18238E-4	3.99022	.44545
0.	0.	3.99005	0.

Distribuciones temporales (radio fijo) y espaciales (tiempo fijo) de velocidad, presión y densidad.

SIMETRIA ESFERICA (j=2) <span style="float: right;">Y=3</span>			
$t/ t_s $	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
-1.	-1.	1.	1.
- .883206	- .947243	1.0752	1.05095
- .750403	- .887907	1.16326	1.10474
- .109489	- .592803	1.64614	1.3315
-3.87495E-2	- .55741	1.70919	1.3551
1.85036E-2	- .527973	1.76242	1.3742
.258364	- .393829	2.01775	1.4565
.587745	- .145356	2.56944	1.5955
.680241	-3.11687E-2	2.881	1.6592
.694045	-8.26618E-3	2.95026	1.67245
-----			
.694045	.521081	5.65054	2.1002
.875462	.369106	4.1494	1.87295
1.90402	.142577	1.95405	1.41115
7.1638	3.57391E-2	.703373	.95655
18.8805	1.34734E-2	.345474	.72925
72.3465	3.51052E-3	.129871	.50195
634.74	4.00034E-4	2.67662E-2	.274645
-----			
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
$\infty$	0.	0.	1.3664
12.6688	- .123767	9.68487E-2	1.3742
5.64365	- .187146	.250362	1.39015
2.36625	- .240769	.754145	1.4565
1.7194	- .207062	1.21101	1.5202
1.40246	- .119816	1.74581	1.5955
1.2779	-2.70942E-2	2.177	1.6592
1.26166	-7.23828E-3	2.26215	1.67245
-----			
1.26166	.456284	4.33262	2.1002
1.08833	.351681	3.76688	1.87295
.663765	.180192	3.1211	1.41115
.285613	7.31249E-2	2.94461	.95655
.154146	3.92122E-2	2.92621	.72925
6.55613E-2	1.66509E-2	2.92174	.50195
1.64588E-2	4.17919E-3	2.9213	.274645
0.	0.	2.92115	0.

Distribuciones temporales (radio fijo) y espaciales (tiempo fijo) de velocidad, presión y densidad.

SIMETRIA CILINDRICA (j=1) $\gamma=25$			
$t/ t_s $	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
-1.	-1.	1.	1.
- .777083	- .920253	1.05173	1.0024
- .249632	- .690437	1.22191	1.00916
-7.09646E-2	- .590409	1.30831	1.01212
-3.21608E-2	- .566142	1.33024	1.01283
5.28422E-4	- .54485	1.35	1.01346
.214447	- .377969	1.52478	1.01857
.389662	- .158296	1.81108	1.02569
.443471	-3.52169E-2	2.00858	1.02995
<hr/>			
.443471	.689051	3.83299	1.056
.966947	.223081	1.87129	1.02582
2.72722	7.12939E-2	.992832	.999785
8.91233	2.13486E-2	.519494	.973846
30.8839	6.13777E-3	.266496	.947815
111.169	1.70412E-3	.134461	.921858
415.431	4.55984E-4	6.65127E-2	.895892
1614.2	1.17350E-4	3.22188E-2	.869917
3230.9	5.86297E-5	2.22417E-2	.856929
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
$\infty$	0.	0.	1.01346
252.35	-7.26543E-2	2.40050E-2	1.01346
3.09124	- .250558	.670054	1.01857
1.99535	- .123077	1.09484	1.02569
1.81486	-2.83439E-2	1.30108	1.02995
<hr/>			
1.81486	.554574	2.48287	1.056
1.02494	.221088	1.838	1.02582
.479317	9.31958E-2	1.69654	.999785
.201219	3.82851E-2	1.67072	.973846
8.09185E-2	1.53388E-2	1.66684	.947815
3.16462E-2	5.99526E-3	1.66525	.921858
1.20414E-2	2.28100E-3	1.6644	.895892
4.45260E-3	8.43442E-4	1.66437	.869917
2.67741E-3	5.07174E-4	1.66436	.856929
0.	0.	1.66434	0.

Distribuciones temporales (radio fijo) y espaciales (tiempo fijo) de velocidad, presión y densidad.

SIMETRIA ESFERICA		(j=2)	$\gamma=25$
$t/ t_s $	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
-1.	-1.	1.	1.
- .783392	- .854747	1.04365	1.00225
- .157699	- .37996	1.20905	1.00918
-1.32572E-2	- .250705	1.26426	1.0111
-3.21285E-3	- .241281	1.26869	1.01125
5.70015E-3	- .232851	1.27258	1.01138
.215503	2.01920E-2	1.38963	1.01502
.424204	.281975	1.62481	1.02132
.49231	.46165	1.84294	1.02642
<hr/>			
.49231	.860261	2.72751	1.04243
.57533	.686442	2.10089	1.03145
1.40116	.205776	.610585	.980954
5.4555	4.51703E-2	.166254	.930369
28.1255	8.49267E-3	4.22460E-2	.879868
166.471	1.42872E-3	9.89404E-3	.829339
1108.15	2.14509E-4	2.11511E-3	.778809
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$\rho/\rho_s$
$\infty$	0.	0.	1.01138
21.4421	-2.84598E-2	1.90104E-2	1.01138
2.4855	1.08155E-2	.398687	1.01502
1.66316	.198938	.808754	1.02132
1.52254	.346041	1.03548	1.02642
<hr/>			
1.52254	.644827	1.53247	1.04243
1.38811	.548207	1.33994	1.03145
.818654	.236038	.803379	.980954
.365502	9.00696E-2	.661034	.930369
.138152	3.29990E-2	.637819	.879868
4.81110E-2	1.14427E-2	.634655	.829339
1.56266E-2	3.71458E-3	.634247	.778809
0.	0.	.634051	0.

Distribuciones temporales (radio fijo) y espaciales (tiempo fijo) de velocidad, presión y densidad.

SIMETRIA CILINDRICA		(j=1)	$\gamma \rightarrow \infty$
$t/ t_s $	$u/ u_s $	$p/p_s$	$(\rho/\rho_s)^\gamma$
-1.	-1.	1.	1.
- .773123	- .913713	1.04564	1.04564
- .471877	- .783151	1.12275	1.12275
- .227467	- .657201	1.20793	1.20793
-3.00531E-2	- .533952	1.30364	1.30364
4.35604E-4	- .512368	1.3218	1.3218
.135295	- .404615	1.41982	1.41982
.348145	- .151021	1.70797	1.70797
.420994	1.91615E-2	1.9593	1.9593
<hr/>			
.420994	.744784	3.6829	3.60947
.903035	.241303	1.73299	1.69844
3.1323	6.13045E-2	.796109	.780235
10.2132	1.84535E-2	.41175	.40354
118.356	1.58618E-3	.10777	.105621
517.819	3.62510E-4	4.81443E-2	4.71845E-2
<hr/>			
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$(\rho/\rho_s)^\gamma$
$\infty$	0.	0.	1.32156
277.678	-6.19747E-2	1.93390E-2	1.32181
14.3778	- .181561	.180765	1.33774
5.3829	- .231847	.392714	1.38983
3.1051	- .21703	.637769	1.49327
2.15359	- .11323	.960121	1.70798
1.87573	1.51313E-2	1.22177	1.9593
<hr/>			
1.87573	.588134	2.29657	3.60947
1.76715	.520694	2.15158	3.23352
1.61003	.436024	1.97981	2.77444
1.41332	.34846	1.81828	2.31058
.660693	.130789	1.5197	1.09108
.184626	3.47962E-2	1.46399	.40354
2.28149E-2	4.28290E-3	1.45963	8.37073E-2
0.	0.	1.45948	0.

Distribuciones temporales (radio fijo) y espaciales (tiempo fijo) de velocidad, presión y densidad.



SIMETRIA ESFERICA (j=2)		$\gamma \rightarrow \infty$	
$t/ t_s $	$u/ u_s $	$p/p_s$	$(\rho/\rho_s)^\gamma$
-1.	-1.	1.	1.
- .779739	- .840973	1.02797	1.02797
- .482284	- .612956	1.07482	1.07482
- .165576	- .34588	1.14374	1.14374
-1.20138E-2	- .202406	1.18977	1.18977
4.41831E-4	- .190207	1.19403	1.19403
.153097	-3.13204E-2	1.25669	1.25669
.382422	.267713	1.42575	1.42575
.496387	.528097	1.68478	1.68478
<hr/>			
.496388	.870056	2.37367	2.36581
1.04805	.313753	.70961	.707258
2.09264	.130329	.307363	.306344
3.066	8.40266E-2	.208754	.208063
168.474	1.38588E-3	6.84714E-3	6.82447E-3
5132.9	4.54489E-5	4.10444E-4	4.09084E-4
<hr/>			
$r/r_s$	$u/ u_s $	$p/p_s$	$(\rho/\rho_s)^\gamma$
$\infty$	0.	0.	1.19182
14.5948	-2.76187E-2	2.81059E-2	1.1976
6.26342	-4.05759E-2	9.27876E-2	1.20998
3.01631	-1.44634E-2	.267986	1.25669
2.53062	1.53514E-2	.350243	1.28458
1.89391	.127373	.563995	1.37877
1.50989	.395803	.946396	1.68478
<hr/>			
1.50989	.652099	1.33338	2.36581
1.32508	.531873	1.0865	1.6058
.647647	.176635	.564571	.306344
.340674	8.29393E-2	.490167	.108224
2.04922E-2	4.78118E-3	.466141	2.01292E-3
0.	0.	.466037	0.

Distribuciones temporales (radio fijo) y espaciales (tiempo fijo) de velocidad, presión y densidad.

SIMETRIA ESFERICA (j=2) $\gamma=5/3$				
$t/ t_s $	$r_p/ r_s $	$u_p/ u_s $	$p_p/p_s$	$\rho_p/\rho_s$
-1.	1.	-1.	1.	1.
-.872498	.93371	-1.01427	1.10575	1.06219
-.732718	.859991	-1.02841	1.25605	1.1466
-.683925	.834029	-1.03272	1.31984	1.1812
-.642647	.811985	-1.03602	1.37955	1.21297
-.575057	.77575	-1.04056	1.49072	1.27071
-.546589	.760445	-1.04208	1.54332	1.29743
-.36999	.665227	-1.04411	1.97573	1.50469
-.191435	.56966	-1.02422	2.72075	1.82315
-.135955	.540508	-1.01056	3.06001	1.95633
-9.19919E-2	.517728	-.996146	3.38236	2.0775
-2.76467E-5	.471382	-.952693	4.26382	2.3872
9.38527E-2	.426777	-.882521	5.58805	2.80779
.158912	.398262	-.811683	6.89263	3.18448
.199253	.381926	-.75511	7.93151	3.46435
.227025	.371423	-.708905	8.78219	3.68273
.247427	.364155	-.670338	9.49488	3.85924
.275533	.354859	-.60923	10.6308	4.12997
.285651	.351741	-.58446	11.0941	4.23704
.294047	.349254	-.562554	11.5054	4.33061
.307177	.345564	-.5254	12.2071	4.48719
.312404	.344168	-.509452	12.51	4.55368
.320977	.341974	-.481578	13.0424	4.66899
.324532	.341101	-.469297	13.2783	4.71844
.324532	.341101	.307828	33.8475	8.06778
.363396	.346942	.270245	30.6298	7.59839
.413507	.353451	.234738	27.542	7.12906
.478484	.360737	.201527	24.5868	6.65973
.564053	.368919	.170783	21.7674	6.1904
.678748	.378144	.142626	19.087	5.72107
.835719	.388595	.117128	16.5493	5.25174
1.05598	.400517	9.43235E-2	14.1586	4.78241
1.37467	.414238	7.42075E-2	11.9194	4.31308
1.85362	.430221	5.67454E-2	9.83708	3.84375
2.60903	.449138	4.18752E-2	7.91783	3.37442
3.87759	.47201	2.95109E-2	6.16889	2.90509
6.1953	.500487	1.95441E-2	4.59901	2.43576
10.9648	.537453	1.18444E-2	3.21913	1.96643
22.7189	.58857	6.25659E-3	2.04342	1.4971
62.1022	.66718	2.59397E-3	1.09168	1.02776
317.339	.817615	6.22054E-4	.394964	.558432

Distribuciones de velocidad, presión y densidad a lo largo de las trayectorias.



APÉNDICE B

### Apéndice 3

En este apéndice vamos a presentar las ecuaciones diferenciales (V.4) y las condiciones en la onda de choque (V.5) y superficie exterior (V.12), que determinan cada uno de los términos de orden unidad, orden  $x_s$  y orden  $x_s^2$  de la solución (V.13) desarrollada en potencias de  $x_s$ . También se darán las expresiones de  $e_{s0}$ ,  $e_{s1}$ , y  $e_{s2}$  obtenidas a partir de la ecuación de estado  $e = e(p, \rho)$ . Por último daremos el sistema de ecuaciones algébricas que determina los coeficientes de (V.22) en el caso de un gas perfecto, haciendo aplicación a  $\gamma = 3$ ,  $j = 2$  representado en la Fig. V.1.

#### Ecuaciones

a) Orden de magnitud unidad

$$(\phi_0 - \xi)(d\psi_0/d\xi) + \psi_0(d\phi_0/d\xi) = 0$$

$$(\phi_0 - \xi)(d\phi_0/d\xi) + (df_0/d\xi)/\psi_0 = 0$$

$$d(f_0/\psi_0^{\gamma_0})/d\xi = 0 \quad ,$$

con las condiciones

$$\psi_0(1) = 1/\{1 - \phi_0(1)\}$$

$$f_0(1) = \phi_0(1)$$

$$f_0\{\xi_\lambda(x_s)\} = p_0/\rho_0 D_0^2$$

b) Orden de magnitud  $x_s$

$$(\phi_0 - \xi)(d\psi_1/d\xi) + \psi_0(d\phi_1/d\xi) = -j\phi_0\psi_0 - \psi_1$$

$$(\phi_0 - \xi)(d\phi_1/d\xi) + (df_1/d\xi)/\psi_0 = -\phi_1 - A\phi_0$$

$$(\phi_o - \xi) d\{(f_1/f_o) - (\gamma_o \psi_1/\psi_o)\}/d\xi = -\{(f_1/f_o) - (\gamma_o \psi_1/\psi_o)\} - 2A$$

con las condiciones

$$\psi_1(1) = \phi_1(1)/\{1 - \phi_o(1)\}^2$$

$$f_1(1) = \phi_1(1)$$

$$f_1\{\xi_\ell(x_s)\} = -\phi_o(1)\{(NR_o/D_o) + 2A\}$$

c) Orden de magnitud  $x_s$

$$(\phi_o - \xi) \frac{d\psi_2}{d\xi} + \psi_o \frac{d\phi_2}{d\xi} = -j(\phi_o \psi_1 + \phi_1 \psi_o - \xi \phi_o \psi_o) - 2\psi_2 - \frac{d(\phi_1 \psi_1)}{d\xi}$$

$$(\phi_o - \xi) \frac{d\phi_2}{d\xi} + \frac{1}{\psi_o} \frac{df_2}{d\xi} = -\{A\phi_1 + (2B - A^2)\phi_o\} - 2\phi_2 - \frac{1}{2} \frac{d\phi_1^2}{d\xi} + \left(\frac{\psi_1}{\psi_o}\right) \frac{df_1}{d\xi}$$

$$(\phi_o - \xi) \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{f_2}{f_o} - \gamma_o \frac{\psi_2}{\psi_o} - \gamma_o \frac{\psi_1}{\psi_o} \left( \frac{f_1}{f_o} - \frac{\gamma_o + 1}{2} \frac{\psi_1}{\psi_o} \right) \right] + \phi_1 \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{f_1}{f_o} - \gamma_o \frac{\psi_1}{\psi_o} \right] =$$

$$= -2 \left[ \frac{f_2}{f_o} - \gamma_o \frac{\psi_2}{\psi_o} - \gamma_o \frac{\psi_1}{\psi_o} \left( \frac{f_1}{f_o} - \frac{\gamma_o + 1}{2} \frac{\psi_1}{\psi_o} \right) \right] - 2 \left[ 2B - A^2 + A \left( \frac{f_1}{f_o} - \gamma_o \frac{\psi_1}{\psi_o} \right) \right] +$$

$$+ \left[ G_p (2Af_o + f_1) + G_o \psi_1 \right] \left[ (\phi_o - \xi) \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\psi_1}{\psi_o} \right) + \frac{\psi_1}{\psi_o} \right]$$

con las condiciones

$$\psi_2(1) = \{\phi_1^2(1)/[1 - \phi_o(1)]^2 + \phi_2(1)/[1 - \phi_o(1)]\}/[1 - \phi_o(1)]$$

$$f_2(1) = \phi_2(1)$$

$$f_2\{\xi_\ell(x_s)\} = -\{(5ANR_o/2D_o) - 3A^2 - (QR_o^2/D_o^2) - 2B\}\phi_o(1)$$

Valores de  $e_{s0}$ ,  $e_{s1}$  y  $e_{s2}$

Conocida la ecuación de estado  $e = e(p, \rho)$ , los valores de  $e_{s0}$ ,  $e_{s1}$ , y  $e_{s2}$  que aparecen en (V.27) son:

$$e_{s0} = e(p_0, \rho_{s0})$$

$$e_{s1} = (\partial e / \partial p)_{s0} \rho_0 D_0^2 \{ 2A\phi_0(1) + \phi_1(1) \} + (\partial e / \partial \rho)_{s0} \rho_0 \phi_1(1) / \{ 1 - \phi_0(1) \}^2$$

$$e_{s2} = (\partial e / \partial p)_{s0} \rho_0 D_0^2 \{ (A + 2B)\phi_0(1) + 2A\phi_1(1) + \phi_2(1) \} +$$

$$+ (\partial e / \partial \rho)_{s0} \rho_0 \{ \phi_1^2(1) / [1 - \phi_0(1)]^2 + \phi_2(1) / [1 - \phi_0(1)] \} / [1 - \phi_0(1)] +$$

$$+ (\partial^2 e / \partial p^2)_{s0} \rho_0^2 D_0^4 \{ 2A\phi_0(1) + \phi_1(1) \}^2 / 2 +$$

$$+ (\partial^2 e / \partial \rho^2)_{s0} \rho_0^2 \{ \phi_1^2(1) / [1 - \phi_0(1)]^2 \} / 2 +$$

$$+ (\partial^2 e / \partial p \partial \rho)_{s0} \rho_0^2 D_0^2 \{ 2A\phi_0(1) + \phi_1(1) \} \phi_1(1) / \{ 1 - \phi_0(1) \}^2$$

Sistema de ecuaciones que determinan los coeficientes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  y Benelcasodeungasperfecto

Para el caso de un gas perfecto, los coeficientes que determinan los términos de orden  $x_s$  de la solución (V.22), mediante el sistema de ecuaciones que se da a continuación. En este sistema se ha añadido una ecuación con una nueva incógnita,  $F$ , por comodidad para su resolución. Esta ecuación es:  $2B + \{1 - \phi_0(1)\}F = A^2$ . En el caso de un gas perfecto  $\phi_0(1) > f_0(1) = 2 / (\gamma + 1)$  y  $\psi_0(1) = (\gamma + 1) / (\gamma - 1)$ , siendo  $\phi_1(1) = f_1(1) = \psi_1(1) = \phi_2(1) = f_2(1) = \psi_2(1) = 0$  y por lo tanto  $\alpha_3 = \beta_3 = \delta_3 = 0$ .

El sistema de ecuaciones es el dado a continuación.

La solución de este sistema de ecuaciones, junto con los valores de  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$  en el caso  $\gamma = 3$ ,  $j = 2$  y  $NR_0/D = -QR_0^2 / D_0^2 = -1$  es:

A	B	$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta$	$\beta_1$
-1/9	0.47869	4/3	2.7252	-4.5599	.11/9	0.15383
$\beta_2$	$\delta$	$\delta_1$	$\delta_2$			
-1.0181	4/3	-0.3187	0.81909			

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\gamma-1} & 0 & -\frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\gamma+1} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} & -1 & -\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma-1}{\gamma+1} & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma+1}{\gamma-1} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} & 0 & 0 & 0 & \frac{2(\gamma+1)}{\gamma-1} \\ 0 & -\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} & 0 & 0 & \gamma-1 & \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma+1} & 0 & 0 \\ 2 & \frac{\gamma-1}{\gamma+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B \\ F \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2(\gamma+1)}{(\gamma-1)^2} A (\delta - 2\Delta) + \frac{\gamma(\gamma-1)}{\gamma+1} \alpha \left[ \beta - \frac{(\gamma-1)\alpha}{\gamma+1} \right] \\ 0 \\ 0 \\ \delta(A-\delta) + \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^2 \alpha \beta \\ -2j/(\gamma-1) \\ \frac{2j\alpha}{\gamma+1} + \frac{j\delta(\gamma+1)}{\gamma-1} + \frac{2j}{\gamma-1} - 2\alpha\delta \\ \beta\delta(\gamma-1)/2 + 4A^2 + 5A \frac{NR_0}{D_0} - 2 \frac{QR_0^2}{D_0^2} \\ A^2 \end{bmatrix}$$

Sistema de ecuaciones que determina los términos de orden  $x_s^2$  de la solución (V.22). Gas perfecto.